الثانية إقتصاد وتدبير

تصحيح الامتحان الوطني 2014

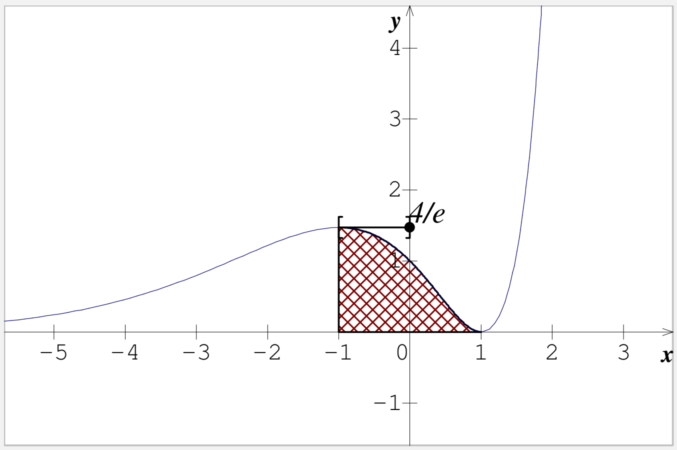
التمرين الأول : (5 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{4} \quad ;n\in\mathbb{N}\end{cases}$	
1. أحسب u_1 و u_2	0,5
2. بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n>\frac{1}{2}$	1
3. أ. بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\frac{-1}{2}\left(u_n-\frac{1}{2}\right)$	0,75
ب. استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية وأنها متقاربة	0,5
4. نضع $v_n=u_n-\frac{1}{2}$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ. أحسب v_0	0,25
ب. بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$	0,5
ج. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ لكل n من $\mathbb{N}$	1
د. أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$	0,5

التمرين الثاني : (10,5 ن)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(x-1)^2e^x$ و ليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$	
1. أ. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$	1
ب. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .	1,5
ج. تحقق من أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2x^2e^x$	0,5

د. بين أن : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .	1,5
2. أ. بين أن $f'(x)=(x^2-1)e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$	1
ب. أدرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $f(-1)$ و $f(1)$ و اعط جدول تغيرات الدالة f	2
3. بين أن الدالة F المعرفة ب : $F(x)=(x^2-4x+5)e^x$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$	1
4. في الشكل أسفله (C) هو التمثيل المبياني للدالة f	



أ. باستعمال نتيجة السؤال 3. أحسب مساحة الحيز المخدش	1
ب. حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=1$	1

التمرين الثالث : (4,5 ن)

يحتوي كيس على تسع كرات غير قابلة للتمييز بينها باللمس ، ثلاث منها حمراء و أربع خضراء و كرتان لونهما أبيض.
نسحب عشوائيا كرتين بالتتابع و بدون إحلال .

1. بين أن عدد حالات السحب الممكنة هو 72	0,5
2. نعتبر الحدثين A و B التاليين : A " سحب كرة بيضاء في المرة الأولى " B " سحب كرتين من نفس اللون "	
أ. بين أن $p(A)=\frac{2}{9}$	0,5
ب. أحسب احتمال الحدث B ثم استنتج أن $p(\overline{B})=\frac{13}{18}$ ($\overline{B}$ هو الحدث المضاد للحدث B)	1
3. علما أن الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء ، أحسب احتمال سحب كرتين من لونين مختلفين	1
4. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة . انقل جدول قانون احتمال X على ورقة التحرير ثم املأه معللا جوابك .	1,5

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$			

تصحيح التمرين الأول

.1 $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

.2

✓ من أجل $n = 0$

لدينا : $u_0 = 1$

إذن : $u_0 > \frac{1}{2}$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

- نفترض أن : $u_n > \frac{1}{2}$
- و نبين أن : $u_{n+1} > \frac{1}{2}$ ؟

لدينا حسب الافتراض $u_n > \frac{1}{2}$

إذن $\frac{1}{2}u_n > \frac{1}{4}$

إذن $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

إذن : $u_{n+1} > \frac{1}{2}$

✓ نستنتج أن : **لكل** n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n > \frac{1}{2}$

.3 أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} - u_n = \left(\frac{1}{2} - 1\right)u_n + \frac{1}{4} = \frac{-1}{2}u_n + \frac{1}{4} = \frac{-1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

ب-

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $u_n > \frac{1}{2}$

إذن : $u_n - \frac{1}{2} > 0$

إذن : $\frac{-1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right) < 0$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n < 0$

و منه $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية

✓ بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية و مصغورة (بالعدد $\frac{1}{2}$) فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

4. أ- $v_0 = u_0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.v_n$

إذن : : لكل n من $\mathbb{N}$ $v_{n+1} = \frac{1}{2}.v_n$

و منه المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

ج-

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا : $v_n = v_0.q^n$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$ $v_n = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n$

✓ لدينا : $v_n = u_n - \frac{1}{2}$

إذن $u_n = v_n + \frac{1}{2}$

إذن : $u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}$

و منه $u_n = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ لكل n من $\mathbb{N}$

د- لدينا : $-1 < \frac{1}{2} < 1$

إذن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

و منه $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\frac{1}{2}$

و بالتالي : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$

تصحيح التمرين الثاني

1. أ- لدينا : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2e^x=+\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty\end{cases}$

ب- لدينا : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2\frac{e^x}{x}=+\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\end{cases}$

التأويل الهندسي : (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

ج- ليكن $x\in\mathbb{R}^*$:

لدينا : $f(x)=(x-1)^2e^x=\frac{(x-1)^2}{x^2}.x^2.e^x=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2.x^2.e^x$

إذن : لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2x^2e^x$

د- لدينا : $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2x^2e^x=0$

لأن : $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2=1\\ \lim_{x\to-\infty}x^2e^x=0\end{cases}$

التأويل الهندسي : (C) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=0$ بجوار $-\infty$

2. أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x-1)^2 e^x\right)' \\ &= \left((x-1)^2\right)' e^x + (x-1)^2 \left(e^x\right)' \\ &= 2(x-1)'(x-1)e^x + (x-1)^2\left(e^x\right)' \\ &= 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x \\ &= (x-1)e^x(2+x-1) \\ &= (x+1)(x-1)e^x \\ &= \left(x^2-1\right)e^x \end{aligned}$$

إذن : $f'(x) = \left(x^2-1\right)e^x$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب-

- ✓ لندرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا : $f'(x) = \left(x^2-1\right)e^x$

نعلم أن $e^x > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة x^2-1

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2-1=0 \\ &\Leftrightarrow x=-1 \text{ أو } x=1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

على المجال $]-\infty,-1]$: $f'(x) \geq 0$

على المجال $[-1,1]$: $f'(x) \leq 0$

على المجال $[1,+\infty[$: $f'(x) \geq 0$

- ✓ لدينا : $f(1) = (1-1)^2 e^1 = 0$ و $f(-1) = (-1-1)^2 e^{-1} = \dfrac{4}{e}$
- ✓ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$4/e$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

.3

- ✓ لدينا : F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$)
- ✓ ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = \left(\left(x^2-4x+5\right)e^x\right)'$$

$$= \left(x^2-4x+5\right)' e^x + \left(x^2-4x+5\right)\left(e^x\right)'$$

$$= (2x-4)e^x + \left(x^2-4x+5\right)e^x$$

$$= \left(2x-4+x^2-4x+5\right)e^x$$

$$= \left(x^2-2x+1\right)e^x$$

$$= (x-1)^2 e^x$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $F'(x) = f(x)$

و بالتالي : الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

.4 أ-

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx.(UA)$$

$$A = \left[F(x)\right]_{-1}^{1}.(UA)$$

$$A = \left[\left(x^2-4x+5\right)e^x\right]_{-1}^{1}.(UA)$$

$$A = \left(2e - \frac{10}{e}\right).(UA)$$

ب- مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$ هو عدد نقط تقاطع المنحنى (C) و المستقيم ذي المعادلة $y = 1$

و منه المعادلة $f(x) = 1$ تقبل ثلاث حلول .

math.ma

تصحيح التمرين الثالث

.1 التجربة " سحب كرتين بالتتابع و بدون إحلال من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

$$card\,\Omega = A_9^2 = 9\times 8 = 72$$

.2 أ- A" سحب كرة بيضاء في المرة الأولى "

$\boxed{X}$ و $\boxed{B}$

$$cardA = A_2^1\times A_8^1 = 2\times 8 = 16$$

$$p(A) = \frac{cardA}{card\,\Omega} = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$$

ب-

✓ B" سحب كرتين من نفس اللون "

$\boxed{V}\boxed{V}$ أو $\boxed{R}\boxed{R}$ أو $\boxed{B}\boxed{B}$

$$cardB = A_2^2 + A_4^2 + A_3^2 = 2+12+6 = 20$$

$$p(B) = \frac{cardB}{card\,\Omega} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

✓ $$p\left(\overline{B}\right) = 1 - p(B) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

.3 لنحسب احتمال سحب كرتين من لونين مختلفين علما أن الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء

$$p_A\left(\overline{B}\right) = \frac{p\left(A\cap\overline{B}\right)}{p(A)}$$

$A\cap\overline{B}$ " $\boxed{R}$ و $\boxed{B}$ أو $\boxed{V}$ و $\boxed{B}$ "

$$card\left(A\cap\overline{B}\right) = A_2^1\times A_4^1 + A_2^1\times A_3^1 = 2\times 4 + 2\times 3 = 14$$

$$p\left(A\cap\overline{B}\right) = \frac{card\left(A\cap\overline{B}\right)}{card\,\Omega} = \frac{14}{72} = \frac{7}{36}$$

إذن : $$p_A\left(\overline{B}\right) = \frac{p\left(A\cap\overline{B}\right)}{p(A)} = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{2}{9}} = \frac{7}{36}\times\frac{9}{2} = \frac{7}{8}$$

.4 X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة

$$\overline{B}\,\overline{B} \quad\rightarrow\quad X = 0$$

$$\begin{cases} B\overline{B} \\ \overline{B}B \end{cases} \rightarrow \quad X = 1$$

$$BB \quad \rightarrow \quad X = 2$$

$$p(X = 0) = \frac{A_7^2}{72} = \frac{42}{72} = \frac{7}{12}$$

$$p(X = 0) = \frac{2\times\left(A_2^1\times A_7^1\right)}{72} = \frac{2\times 2\times 7}{72} = \frac{28}{72} = \frac{7}{18}$$

$$p(X = 2) = \frac{A_2^2}{72} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$$

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{36}$

つづく

math.ma