

## الدوال الأسية

## السلسلة 1 (5 تمارين ~ 27 صفحة)

التمرين الأول :

في الشكل أسفله  $(C_f)$  هو التمثيل المبياني في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  لدالة عددية  $f$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}^*$ .

علما أن  $(C_f)$  يقبل :

- فرعا شلجيميا باتجاه محور الأرتيب بجوار  $-\infty$
- محور الأرتيب مقاربا عموديا

- المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = -x$  مقاربا مانلا بجوار  $+\infty$   
( أنظر الشكل )

من خلال قراءتك للمبيان :

1. أ. حدد النهايات التالية :

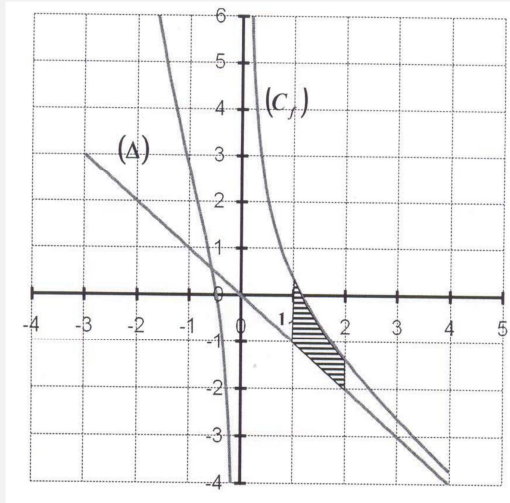
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$$

ب. اعط جدول تغيرات  $f$  على مجموعة تعريفها

ج. اعط إشارة  $f(x) + x$  على المجال  $]0, +\infty[$

د. اعط عدد حلول المعادلة  $f(x) = -x$  على  $\mathbb{R}^*$

2. أحسب مساحة الحيز المخدش في المبيان إذا علمت أن  $f(x) = e^{-x} - x + \frac{1}{x}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$



## التمرين الثاني :

## الجزء الأول

نعتبر الدالة  $g$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :  $g(x) = -xe^{-x} + 1$

(1) أحسب  $g'(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ثم اعط جدول تغيرات الدالة  $g$

(2) استنتج أن  $g(x) > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

## الجزء الثاني

نعتبر الدالة  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = x - 1 + (x + 1)e^{-x}$

و ليكن  $(C_f)$  منحناها في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب- بين أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (يمكنك وضع  $t = -x$ )

(2) أ- بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$

(3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$

(4) أ- بين أن  $f'(x) = g(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة  $f$

(5) أدرس تقعر المنحنى  $(C_f)$  محددا نقط انعطافه

(6) أ- حدد معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة التي أفصولها 0

ب- أنشئ  $(T)$  و  $(C_f)$  (نأخذ  $e^{-1} \simeq 0,36$ )

(7) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، أحسب  $\int_0^2 (x+1)e^{-x} dx$

ب- أحسب مساحة الحيز المحصور بين  $(C_f)$  و المستقيمتين اللذين معادلاتهم :  $y = x - 1$  و  $x = 0$  و  $x = 2$

## الجزء الثالث

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(1) بين أن  $0 \leq u_n \leq 1$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

(2) بين أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية

(3) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة و حدد نهايتها .

## التمرين الثالث :

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$  . وليكن  $(C_f)$  منحناها في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- (1) حدد  $D_f$
- (2) أحسب نهايات  $f$  عند محددات  $D_f$
- (3) أدرس تغيرات  $f$  و اعط جدول تغيراتها
- (4) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى  $(C_f)$
- (5) بين أن النقطة  $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$  مركز تماثل للمنحنى  $(C_f)$
- (6) أنشئ  $(C_f)$
- (7) أحسب مساحة الحيز المحصور بين  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = 2x$  و المستقيمين اللذين معادلتهما  $x = 1$  و  $x = \ln 2$

### التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $[0, +\infty[$  بما يلي :  $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$  . وليكن  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  . (وحدة القياس  $4cm$ )

#### الجزء الأول

لتكن الدالة  $g$  المعرفة بما يلي :  $g(x) = x + 2 - e^x$

- (1) أدرس تغيرات  $g$  على  $[0, +\infty[$  ثم أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- (2) أ- بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في  $[0, +\infty[$   
ب- تحقق أن  $1,14 < \alpha < 1,15$
- (3) أدرس إشارة  $g(x)$  على  $[0, +\infty[$

#### الجزء الثاني

(1) أ- بين أن لكل  $x$  من  $[0, +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

ب- استنتج تغيرات  $f$  على  $[0, +\infty[$

(2) أ- بين أن لكل  $x \geq 0$  :  $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

ب- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و أول هندسيا النتيجة

(3) أ- بين أن  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

ب- اعط تاطيرال  $f(\alpha)$  سعته  $10^{-2}$

(4) حدد معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الأفصول 0

$$(5) \text{ أ- بين أن لكل } x \text{ من } [0, +\infty[ : \frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1} = f(x) - x \text{ حيث } u(x) = e^x - xe^x - 1$$

ب- أدرس تغيرات الدالة  $u$  على  $[0, +\infty[$  و استنتج إشارة  $u(x)$  على  $[0, +\infty[$

ج- أدرس الوضع النسبي ل  $(C_f)$  و  $(T)$

(6) أنشئ  $(C_f)$  و  $(T)$

### الجزء الثالث

(1) حدد دالة أصلية ل  $f$  على  $[0, +\infty[$  ( يمكنك استعمال الجزء الثاني السؤال (2) )

(2) نرسم  $\mathcal{D}$  الحيز المحصور بين  $(C_f)$  و  $(T)$  و المستقيمين اللذين معادلتاهما  $x=0$  و  $x=1$

أحسب ب  $cm^2$  المساحة  $\mathcal{A}$  للحيز  $\mathcal{D}$

$$(3) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{، نضع } v_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

أ- أحسب  $v_0$ ،  $v_1$  و  $v_2$

ب- أول هندسيا  $v_n$

ج- بين أن لكل  $n \geq 2$  :  $f(n) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n+1)$  ثم حدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

### التمرين الخامس :

I. لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $g(x) = e^x - 2x + 2$

(1) أحسب النهايتين :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

(2) أ- أحسب  $g'(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

ب- أدرس تغيرات  $g$  و استنتج أن  $g(x) > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

II. نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x}$

و ليكن  $(C_f)$  منحناها في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  . ( الوحدة  $2cm$  )

(1) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و بين أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  ثم استنتج أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل فرعا شلجما يتم تحديد اتجاهه بجوار  $-\infty$

ب- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم بين أن المستقيم  $(D)$  ذي المعادلة  $y = \frac{1}{2}x + 1$  مقارب مائل للمنحنى بجوار  $+\infty$

ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(D)$

(2) بين أن :  $f'(x) = \frac{g(x)}{2e^x}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  و استنتج أن  $f$  تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$

(3) أ- بين أنه يوجد عدد حقيقي  $\alpha$  من المجال  $]-1, 0[$  بحيث  $f(\alpha) = 0$

ب- حدد معادلة  $(T)$  مماس المنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الأضلاع 0.

ج- بين أن :  $f(x) = \frac{x-2}{e^x}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ثم حدد زوج إحداثيتي  $I$  نقطة انعطاف المنحنى  $(C_f)$

(4) أنشئ المنحنى  $(C_f)$  ( تأخذ  $2e^{-2} \simeq 0,27$  و  $\ln 2 \simeq 0,7$  )

(5) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :  $\int_0^2 xe^{-x} dx = 1 - \frac{3}{e^2}$

(6) احسب ب  $cm^2$  مساحة الحيز المحصور بين  $(C_f)$  و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين  $x = 2$  و  $x = 0$ .

math.ma

## تصحيح التمرين الأول

1. أ.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$  ( $C_f$ ) يقبل مقاربا عموديا معادلته  $x = 0$ )
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$  ( $C_f$ ) يقبل مقاربا عموديا معادلته  $x = 0$ )
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  ( $C_f$ ) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب بجوار  $-\infty$ )
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 0$  ( $C_f$ ) يقبل مقاربا مائلا معادلته  $y = -x$  بجوار  $+\infty$ )

ب. جدول تغيرات  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$

ج. على المجال  $]0, +\infty[$  لدينا ( $C_f$ ) يوجد فوق المستقيم  $(\Delta): y = -x$ 

$$\text{إن } f(x) - (-x) \geq 0 \text{ و منه } f(x) + x \geq 0$$

د. عدد حلول المعادلة  $f(x) = -x$  على  $\mathbb{R}^*$  :لدينا ( $C_f$ ) و  $(\Delta): y = -x$  يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة  $f(x) = -x$  : حلا وحيدا في  $\mathbb{R}^*$ .2. مساحة الحيز المخدش في المبيان هي مساحة الحيز المحصور بين ( $C_f$ ) و المستقيم  $(\Delta): y = -x$  و المستقيمين اللذين معادلتهما

$$x = 1 \text{ و } x = 2 :$$

$$A = \int_1^2 |f(x) - (-x)| dx . (U.A)$$

و بما أن  $f(x) + x \geq 0$  على المجال  $]0, +\infty[$ 

$$\text{فإن } : A = \int_1^2 (f(x) + x) dx . (U.A)$$

$$\text{إن } : A = \int_1^2 \left( e^{-x} + \frac{1}{x} \right) dx . (U.A)$$

$$\text{إن } : A = \left[ -e^{-x} + \ln x \right]_1^2 . (U.A)$$

$$\text{و منه } : A = (e^{-1} - e^{-2} + \ln 2) . (U.A)$$

## تصحيح التمرين الثاني

## الجزء الأول :

(1) الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ ليكن  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= (-xe^{-x} + 1)' \\
 &= (-x)'e^{-x} + (-x)(e^{-x})' + 0 \\
 &= -e^{-x} - x \cdot (-e^{-x}) \\
 &= -e^{-x} + xe^{-x} \\
 &= (x-1)e^{-x}
 \end{aligned}$$

لدينا :  $e^{-x} > 0$  إذن إشارة  $g'(x)$  هي إشارة  $x-1$ 

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$x-1$	$-$	$0$	$+$

جدول تغيرات الدالة  $g$  :

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$0$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$(e-1)/e$	$1$

(2) لدينا  $g(1)$  هي القيمة الدنيا للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ إذن لكل  $x \in \mathbb{R}$  :  $g(x) \geq g(1)$ إذن لكل  $x \in \mathbb{R}$  :  $g(x) \geq \frac{e-1}{e}$ ومنه لكل  $x \in \mathbb{R}$  :  $g(x) > 0$  ( لأن  $\frac{e-1}{e} > 0$  )

## الجزء الثاني :

(1) أ- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + (x+1)e^{-x} = -\infty$ 

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty : \text{ لأن} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + (x+1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + xe^{-x} + e^{-x} = +\infty \quad \text{ب- لدينا :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} -te^t = 0 \quad \left( \begin{array}{l} t = -x \\ x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty \end{array} \right) \text{ لأن} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \text{أ- لدينا :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} + e^{-x} = 0$$

إذن :  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = x - 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$

$$\text{ب- لدينا :} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1+(x+1)e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-x} = +\infty$$

إذن  $(C_f)$  يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتيب بجوار  $-\infty$ .

(3) ليكن  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) - (x-1) = (x+1)e^{-x}$$

لدينا :  $e^{-x} > 0$  إذن إشارة  $f(x) - (x-1)$  هي إشارة  $(x+1)$

✓ على المجال  $[-1, +\infty[$  :  $x+1 \geq 0$  إذن  $f(x) - (x-1) \geq 0$  و منه  $(C_f)$  يوجد فوق  $(\Delta)$

✓ على المجال  $] -\infty, 1]$  :  $x+1 \leq 0$  إذن  $f(x) - (x-1) \leq 0$  و منه  $(C_f)$  يوجد تحت  $(\Delta)$

(4) أ- الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

ليكن  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1+(x+1)e^{-x})' \\ &= 1+(x+1)'e^{-x} + (x+1).(e^{-x})' \\ &= 1+1.e^{-x} - (x+1)e^{-x} \\ &= 1+e^{-x}.(1-x-1) \\ &= 1-xe^{-x} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

إذن :  $f'(x) = g(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

ب- لدينا حسب الجزء الأول : (2)  $g(x) > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

إذن :  $f'(x) > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

و منه  $f$  تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة  $f$  :



$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

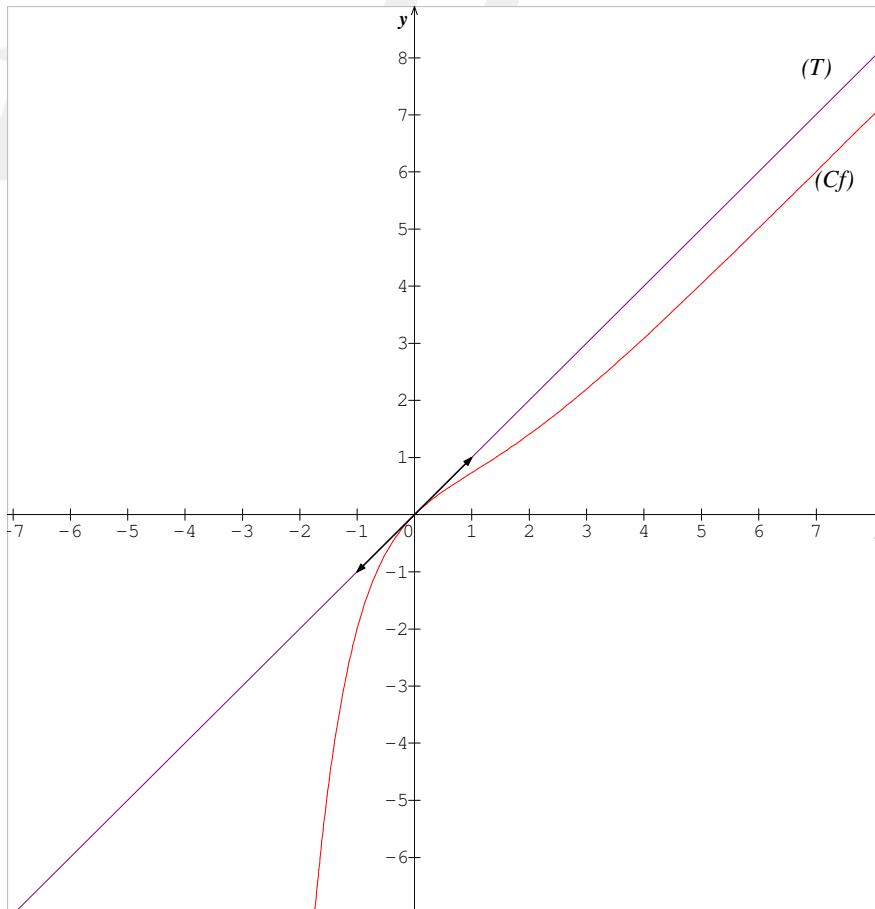
(5)

ليكن  $x \in \mathbb{R}$ لدينا  $f'(x) = g(x)$  إذن  $f''(x) = g'(x)$ و منه على المجال  $[1, +\infty[$  :  $f''(x) \geq 0$  إذن  $(C_f)$  محدبو على المجال  $] -\infty, 1]$  :  $f''(x) \leq 0$  إذن  $(C_f)$  مقعرو بما أن  $f''$  تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 1 فإن النقطة  $I(1, f(1))$  هي نقطة انعطاف لمنحنى  $(C_f)$ .(6) أ- معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة التي أفصولها 0 :

$$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$$

$$y = x \quad \text{أي} \quad y = 1 \cdot (x) + 0$$

ب-



(7) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، لنحسب  $\int_0^2 (x+1)e^{-x} dx$  :

$$\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x+1)e^{-x} dx &= \left[ -(x+1)e^{-x} \right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x} dx \\ &= \left[ -(x+1)e^{-x} \right]_0^2 - \left[ e^{-x} \right]_0^2 \\ &= (-3e^{-2} + 1) - (e^{-2} - 1) \\ &= 2 - 4e^{-2} \end{aligned}$$

ب- مساحة الحيز المحصور بين  $(C_f)$  و المستقيمات اللذين معادلاتهم  $y = x - 1$  و  $x = 0$  و  $x = 2$

( على المجال  $[0,2]$  :  $f(x) - (x-1) \geq 0$  )

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |f(x) - (x-1)| dx .(UA) \\ &= \int_0^2 (f(x) - (x-1)) dx .(UA) \\ &= \int_0^2 (x+1)e^{-x} dx .(UA) \\ &= (2 - 4e^{-2}) .(UA) \end{aligned}$$

الجزء الثالث :

(1)

✓ من أجل  $n = 0$  :

لدينا  $u_0 = 1$

إذن  $0 \leq u_0 \leq 1$

✓ ليكن  $n \in \mathbb{N}$  :

• نفترض أن  $0 \leq u_n \leq 1$

• و نبين أن  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

لدينا  $0 \leq u_n \leq 1$  و لدينا  $f$  تزايدية على المجال  $[0,1]$

إذن :  $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$

إذن :  $0 \leq u_{n+1} \leq 2e^{-1} \leq 1$

✓ نستنتج :  $0 \leq u_n \leq 1$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

(2) ليكن  $n \in \mathbb{N}$  :

لدينا على المجال  $[0,1]$  :  $f(x) \leq x$

و بما أن  $u_n \in [0,1]$  فإن  $f(u_n) \leq u_n$

و منه لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $u_{n+1} \leq u_n$

و بالتالي  $(u_n)$  تناقصية .

(3)

✓ بما أن  $(u_n)$  تناقصية و مصغرة فإن  $(u_n)$  متقاربة

✓

•  $f$  متصلة على المجال  $[0,1]$

•  $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0, 2e^{-1}] \subset [0,1]$

•  $(u_n)$  متقاربة

إذن نهاية  $(u_n)$  هي حل للمعادلة  $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$$

و منه :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

math.ma

## تصحيح التمرين الثالث

(1)

$$\begin{aligned}
 D_f &= \{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \neq 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} / e^x \neq 1\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} \\
 &= ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[
 \end{aligned}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases} \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - 1 = 0^- \end{cases} \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = +\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - 1 = 0^+ \end{cases} \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = +\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن}$$

(3) لندرس تغيرات  $f$ :الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $D_f$

ليكن  $x \in D_f$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left( 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} \right)' \\
 &= 2 + \frac{(e^x)'(e^x - 1) - e^x(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} \\
 &= 2 + \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} \\
 &= 2 + \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(e^x - 1)^2} \\
 &= \frac{2(e^x - 1)^2 - e^x}{(e^x - 1)^2} \\
 &= \frac{2(e^{2x} - 2e^x + 1) - e^x}{(e^x - 1)^2} \\
 &= \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}
 \end{aligned}$$

لدينا :  $(e^x - 1)^2 > 0$  إذن إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $2e^{2x} - 5e^x + 2$

$x$	$-\infty$	$-\ln 2$	$0$	$\ln 2$	$+\infty$
$2e^{2x} - 5e^x + 2$	+	0	-	-	+

جدول تغيرات  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-\ln 2$	$0$	$\ln 2$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$-2\ln(2)-1$	$+\infty$	$2\ln(2)+2$	$+\infty$	

(4)

$$x = 0 \text{ يقبل مقاربا عموديا معادلته } (C_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty \end{cases} \checkmark$$

$$-\infty \text{ بجوار } y = 2x \text{ يقبل مقاربا مائلا معادلته } (C_f) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} : \text{نحسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \frac{e^x}{e^x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{e^x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x : \text{نحسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1$$

$$+\infty \text{ بجوار } y = 2x + 1 \text{ يقبل مقاربا مائلا معادلته } (C_f) : \text{إذن} \quad \color{blue}{\oplus}$$

$$x \in D_f = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[ \text{ ليكن (5)}$$

$$2(0) - x = -x \in D_f = ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[ : \text{من الواضح أن } \checkmark$$

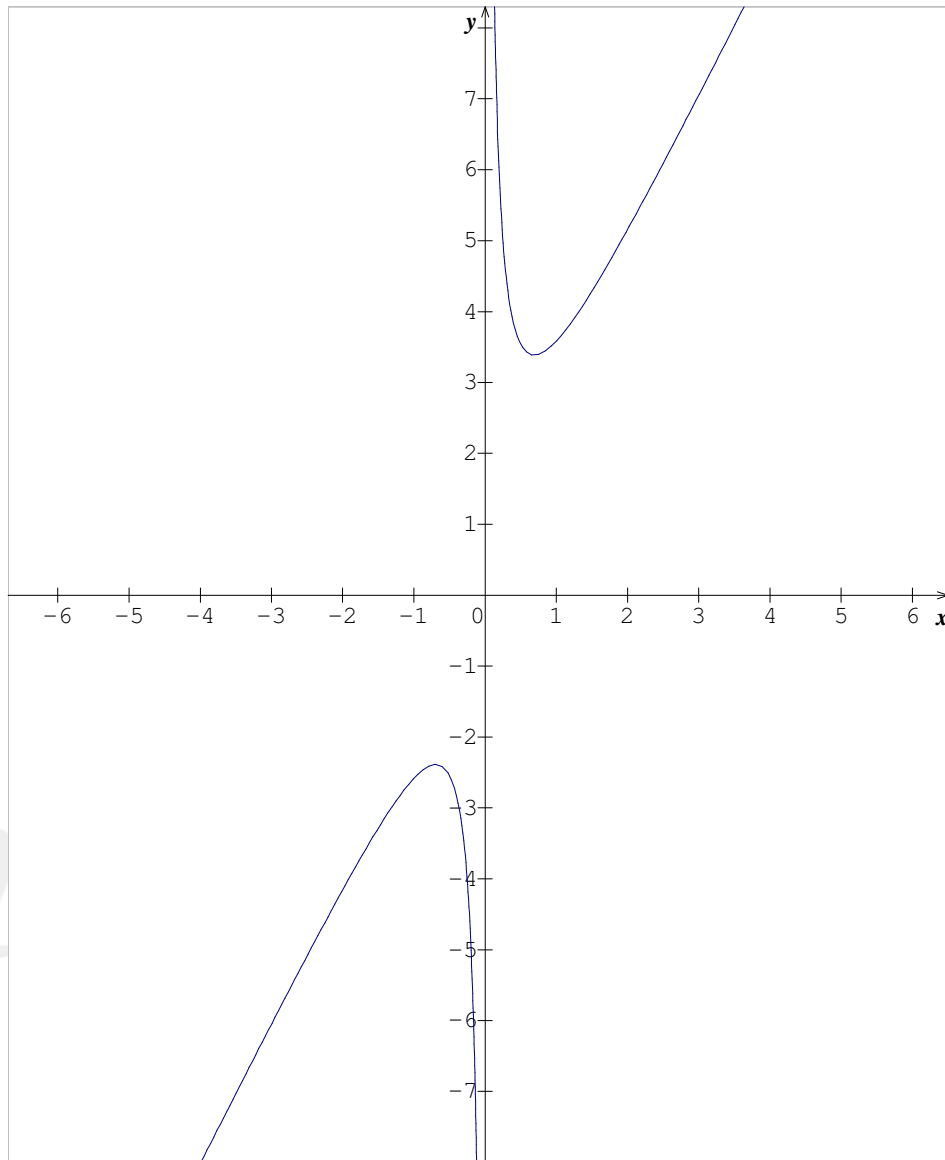
$$f(2(0) - x) = f(-x) = -2x + \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1} = -2x + \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{-x}}} = -2x + \frac{1}{1 - e^x} \quad \checkmark$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) = 1 - \left(2x + \frac{e^x}{e^x - 1}\right) = -2x + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1} = -2x + \frac{\cancel{e^x} - 1 - \cancel{e^x}}{e^x - 1} = -2x + \frac{1}{1 - e^x}$$

$$f(2(0) - x) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) : \text{إذن}$$

$$\text{و منه النقطة } A\left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ مركز تماثل للمنحنى } (C_f).$$

(6)



7) مساحة الحيز المحصور بين  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = 2x$  و المستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = 1$  و  $x = \ln 2$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{\ln 2}^1 |f(x) - 2x| dx .(UA) \\
 &= \int_{\ln 2}^1 \frac{e^x}{e^x - 1} dx .(UA) \\
 &= \int_{\ln 2}^1 \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} dx .(UA) \\
 &= \left[ \ln |e^x - 1| \right]_{\ln 2}^1 .(UA)
 \end{aligned}$$

$$A = \ln(e-1). (UA) \text{ و منه}$$

تصحيح التمرين الرابع :

الجزء الأول

(1)

• ليكن  $x \in [0, +\infty[$

$$g'(x) = (x + 2 - e^x)' = 1 - e^x$$

لدينا :  $x \geq 0$  إذن  $e^x \geq e^0$

إذن  $e^x \geq 1$

إذن  $-e^x \leq -1$

إذن  $1 - e^x \leq 0$

و منه  $g'(x) \leq 0$   $\forall x \in [0, +\infty[$

و لدينا :  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

و بالتالي الدالة  $g$  تناقصية قطعاً على  $[0, +\infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty \quad \bullet$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad \text{لأن} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{array} \right.$$

(2) أ- لنبين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $[0, +\infty[$

بما أن :

✓ الدالة  $g$  متصلة على  $[0, +\infty[$  (مجموع دوال متصلة على  $[0, +\infty[$ )

✓ الدالة  $g$  تناقصية قطعاً على  $[0, +\infty[$

✓ لدينا :  $g(0) = 2$  ،  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  ، إذن  $0 \in g([0, +\infty[)$

فإن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  في المجال  $[0, +\infty[$ .

ب- لدينا :

✓  $g$  متصلة على  $[1, 14; 1, 15]$



$$g(1,14) \times g(1,15) < 0 \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة :  $1,14 < \alpha < 1,15$

ج-

✓ الحالة 1: إذا كان  $x \geq \alpha$

نعلم أن  $g$  تناقصية قطعاً على  $[0, +\infty[$

$$g(x) \leq g(\alpha) \quad \text{إذن}$$

و منه  $g(x) \leq 0$  ( لأن  $g(\alpha) = 0$  )

✓ الحالة 2: إذا كان  $0 \leq x < \alpha$

نعلم أن  $g$  تناقصية قطعاً على  $[0, +\infty[$

$$g(x) \geq g(\alpha) \quad \text{إذن}$$

و منه  $g(x) \geq 0$  ( لأن  $g(\alpha) = 0$  )

الجزء الثاني

(1) أ- ليكن  $x \in [0, +\infty[$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[0, +\infty[$

$$f'(x) = \left( \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} \right)' = \frac{(e^x - 1)' \cdot (xe^x + 1) - (e^x - 1)(xe^x + 1)'}{(xe^x + 1)^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (xe^x + 1) - (e^x - 1)(x'e^x + x(e^x)' + 0)}{(xe^x + 1)^2} \quad \text{إذن :}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (xe^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + xe^x)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x \cdot (xe^x + 1) - (e^x - 1) \cdot (1+x)e^x}{(xe^x + 1)^2} \quad \text{إذن :}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot [(xe^x + 1) - (e^x - 1) \cdot (1+x)]}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x [xe^x + 1 - e^x - xe^x + 1 + x]}{(xe^x + 1)^2} \quad \text{إذن :}$$

$$f'(x) = \frac{e^x [x + 2 - e^x]}{(xe^x + 1)^2} \quad \text{إذن :}$$

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2} : [0, +\infty[ \quad \text{و منه : لكل } x \text{ من } [0, +\infty[$$

ب- على المجال  $[0, \alpha]$  :

لدينا :  $e^x > 0$  و  $(xe^x + 1)^2 > 0$   
و حسب نتيجة الجزء الأول السؤال ج- :  $g(x) \geq 0$   
إذن  $f'(x) \geq 0$  و منه الدالة  $f$  تزايدية

على المجال  $[\alpha, +\infty[$  :

لدينا :  $e^x > 0$  و  $(xe^x + 1)^2 > 0$   
و حسب نتيجة الجزء الأول السؤال ج- :  $g(x) \leq 0$   
إذن  $f'(x) \leq 0$  و منه الدالة  $f$  تناقصية

(2) أ- ليكن  $x \in [0, +\infty[$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(x + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} \quad \text{لدينا :}$$

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} \quad \text{إذن : لكل } x \geq 0$$

ب-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} = 0 \quad \text{لدينا : } \bullet$$

$$\left( \begin{array}{l} t = -x \\ x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty \end{array} \right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \quad \text{لأن :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^{-x} = +\infty \end{array} \right.$$

• بما أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  فإن  $(C_f)$  يقبل مقارب أفقي معادلته  $y = 0$  بجوار  $+\infty$

$$(3) \text{ أ- لدينا : } f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1}$$

و نعلم أن  $\alpha$  حل للمعادلة  $g(x) = 0$  إذن :  $g(\alpha) = 0$

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 - e^\alpha = 0 \quad \text{إذن لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow e^\alpha = \alpha + 2$$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \frac{(\alpha + 2) - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha + 1} \quad \text{و منه :}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} \text{ و بالتالي :}$$

$$\text{ب- لدينا : } 1,14 < \alpha < 1,15 \text{ إذن : } 2,14 < 1+\alpha < 2,15$$

$$\text{إذن : } \frac{1}{2,15} < \frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{2,14}$$

$$\text{إذن : } 0,46 < \frac{1}{2,15} < \frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{2,14} < 0,47$$

$$\text{ومنه : } 0,46 < f(\alpha) < 0,47 \text{ و هذا تأطير للعدد } f(\alpha) \text{ سعته } 0,01 = 10^{-2}$$

(4) معادلة المماس (T) للمنحنى (C<sub>f</sub>) في النقطة ذات الأضلاع 0 :

$$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$$

$$\text{لدينا : } f'(0) = 1 \text{ و } f(0) = 0 \text{ إذن : } y = 1 \cdot (x - 0) + 0 \text{ أي : } y = x$$

(5) أ- ليكن x من [0, +∞[ :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x \\ &= \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1 - x^2)e^x - (1 + x)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1 + x)(1 - x)e^x - (1 + x)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1 + x)[(1 - x)e^x - 1]}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1 + x)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1} \end{aligned}$$

$$\text{إذن : لكل } x \text{ من } [0, +\infty[ \text{ حيث } f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1} \text{ و } u(x) = e^x - xe^x - 1$$

ب- اندرس تغيرات الدالة u

ليكن x من [0, +∞[ :

$$\begin{aligned} u'(x) &= (e^x - xe^x - 1)' \\ &= (e^x)' - (xe^x)' + 0 \\ &= e^x - ((x)'e^x + x(e^x)') \\ &= e^x - (e^x + xe^x) \\ &= e^x - e^x - xe^x \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

لدينا :  $x \geq 0$  و  $e^x > 0$  إذن :  $u'(x) \leq 0$  لكل  $x$  من  $[0, +\infty[$   
إذن الدالة  $u$  تناقصية .

وبما أن  $x \geq 0$  و  $u$  تناقصية فإن :  $u(x) \leq u(0)$  أي :  $u(x) \leq 0$  ( لأن  $u(0) = 0$  )

ج- ليكن  $x$  من  $[0, +\infty[$  :

لندرس الوضع النسبي ل  $(C_f)$  و  $(T)$

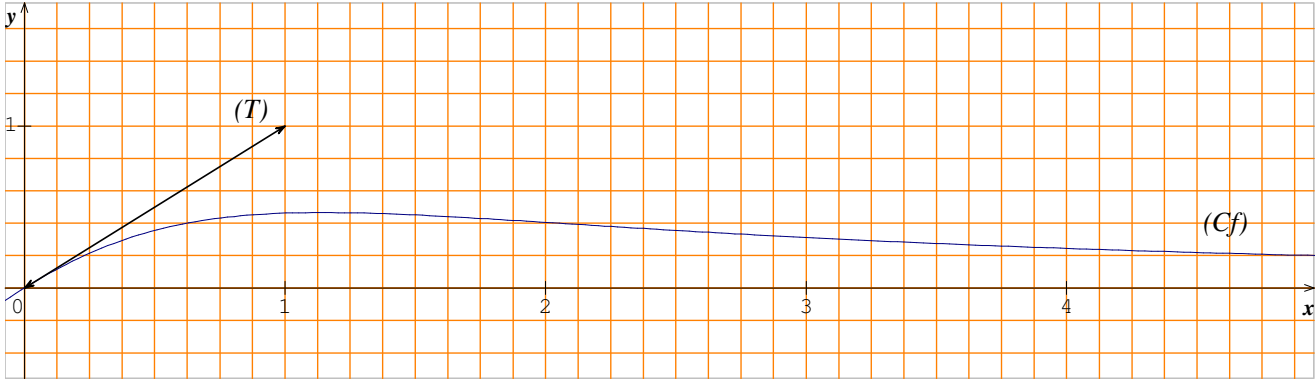
$$\text{لدينا : } f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$$

ولدينا  $x \geq 0$  إذن  $xe^x + 1 > 0$  و  $x+1 > 0$  و منه إشارة  $f(x) - x$  هي إشارة  $u(x)$

و حسب نتيجة لسؤال السابق لدينا :  $u(x) \leq 0$  و منه  $f(x) - x \leq 0$  لكل  $x$  من  $[0, +\infty[$

و بالتالي :  $(C_f)$  يوجد تحت المستقيم  $(T)$

(6)



الجزء الثالث

(1) لنحدد دالة أصلية ل  $f$  على  $[0, +\infty[$

الدالة  $f$  متصلة على  $[0, +\infty[$  إذن  $f$  تقبل دالة أصلية  $F$  على  $[0, +\infty[$

ليكن  $x$  من  $[0, +\infty[$  :

$$\text{لدينا حسب نتيجة السؤال (2) في الجزء الثاني : } f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$$

$$\text{إذن : } f(x) = \frac{(x+e^{-x})'}{x+e^{-x}}$$

و منه لكل  $x$  من  $[0, +\infty[$  :  $F(x) = \ln|x+e^{-x}| = \ln(x+e^{-x})$  ( لأن  $x+e^{-x} > 0$  )

(2)

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x) - x| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \quad \text{لدينا :}$$

وبما أن  $f(x) - x \leq 0$  لكل  $x$  من  $[0, +\infty[$

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x - f(x)) dx \times 4cm \times 4cm : \text{ فإن}$$

$$\mathcal{A} = \left[ \frac{x^2}{2} - F(x) \right]_0^1 \times 16cm^2 : \text{ إذن}$$

$$\mathcal{A} = \left[ \frac{x^2}{2} - \ln(x + e^{-x}) \right]_0^1 \times 16cm^2 : \text{ إذن}$$

$$\mathcal{A} = \left( \frac{1}{2} - \ln(1 + e^{-1}) \right) \times 16cm^2 : \text{ إذن}$$

$$\mathcal{A} = (8 - 16 \ln(1 + e^{-1})) cm^2 : \text{ ومنه}$$

$$(3) \text{ أ- لدينا لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{، نضع } v_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

$$v_0 = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = [\ln(x + e^{-x})]_0^1 = \ln(1 + e^{-1})$$

$$v_1 = \int_1^2 f(x) dx = [F(x)]_1^2 = [\ln(x + e^{-x})]_1^2 = \ln(2 + e^{-2}) - \ln(1 + e^{-1})$$

$$v_2 = \int_2^3 f(x) dx = [F(x)]_2^3 = [\ln(x + e^{-x})]_2^3 = \ln(3 + e^{-3}) - \ln(2 + e^{-2})$$

$$\text{ب- لنبين أن لكل } n \geq 2 : f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$$

• ليكن  $x \in \mathbb{R}$  بحيث :  $n \leq x \leq n+1$  و لدينا  $f$  تناقصية على المجال  $[2, +\infty[$

$$\text{إذن : } f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

$$\text{إذن : } \int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$$

$$\text{إذن : } (n+1-n)f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq (n+1-n)f(n)$$

$$\text{و منه : } f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$$

• نستنتج مما سبق أن  $f(n+1) \leq v_n \leq f(n)$

$$\text{و بما أن } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0$$

$$\text{فإنه حسب مبرهنة الدرك : } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

## تصحيح التمرين الخامس

.I  
(1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 2x + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - 2 + \frac{2}{x} \right) = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 2x + 2 = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x + 2 = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

(2) أ- الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$ ليكن  $x \in \mathbb{R}$  :

$$g'(x) = (e^x - 2x + 2)' = e^x - 2$$

$$g'(x) = e^x - 2 : \mathbb{R} \text{ من } x \text{ لكل}$$

ب-

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 2$$

لندرس إشارة  $e^x - 2$  :

$x$	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$e^x - 2$	-	0	+

جدول تغيرات الدالة  $g$  :

$x$	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$4 - 2\ln 2$	$+\infty$

✓ لدينا  $g(\ln 2)$  هي القيمة الدنيا للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ إذن :  $g(x) \geq g(\ln 2)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

إن:  $g(x) \geq 4 - 2\ln 2 > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$   
ومنه  $g(x) > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

■ II

(1) أ-

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x} = -\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x + 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{لأن:} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{x} + e^{-x} = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن:}$$

$(C_f)$  يقبل فرعاً شلجماً في اتجاه محور الأرتاب بجوار  $-\infty$

ب-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x} = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} -te^t = 0 \end{array} \right. \quad \text{لأن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \quad \checkmark \text{ لدينا:}$$

إن:  $(C_f)$  يقبل المستقيم  $(D)$  مقاربا مانلا معادلته  $y = \frac{1}{2}x + 1$  بجوار  $+\infty$

ج- ندرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(D)$ :

ليكن  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\text{لدينا } f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = xe^{-x} > 0 \text{ فإن إشارة } f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \text{ هي إشارة } x$$

$\checkmark$  على المجال  $]-\infty, 0]$  لدينا  $x \leq 0$  إن  $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \leq 0$  ومنه  $(C_f)$  يوجد تحت  $(D)$

✓ على المجال  $[0, +\infty[$  لدينا  $x \geq 0$  إذن  $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \geq 0$  و منه  $(C_f)$  يوجد فوق  $(D)$

(2) الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x}\right)' \\ &= \frac{1}{2} + (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' \\ &= \frac{1}{2} + e^{-x} - xe^{-x} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} \\ &= \frac{e^x + 2 - 2x}{2e^x} \\ &= \frac{g(x)}{2e^x} \end{aligned}$$

إذن :  $f'(x) = \frac{g(x)}{2e^x}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

لدينا :  $g(x) > 0$  و  $2e^x > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

إذن  $f'(x) > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

و منه الدالة  $f$  تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$

(3) أ-

✓  $f$  متصلة على  $[-1, 0]$

✓ لدينا  $f(-1) = \frac{1}{2} - e < 0$  و  $f(0) = 1 > 0$  إذن :  $f(0) \times f(-1) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : يوجد  $\alpha$  من المجال  $]-1, 0[$  بحيث  $f(\alpha) = 0$

ب- معادلة  $(T)$  مماس المنحنى  $(C_f)$  عند النقطة ذات الأضول  $0$  :

$$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$$

$$y = \frac{3}{2}x + 1$$



ج- ليكن  $x \in \mathbb{R}$  :

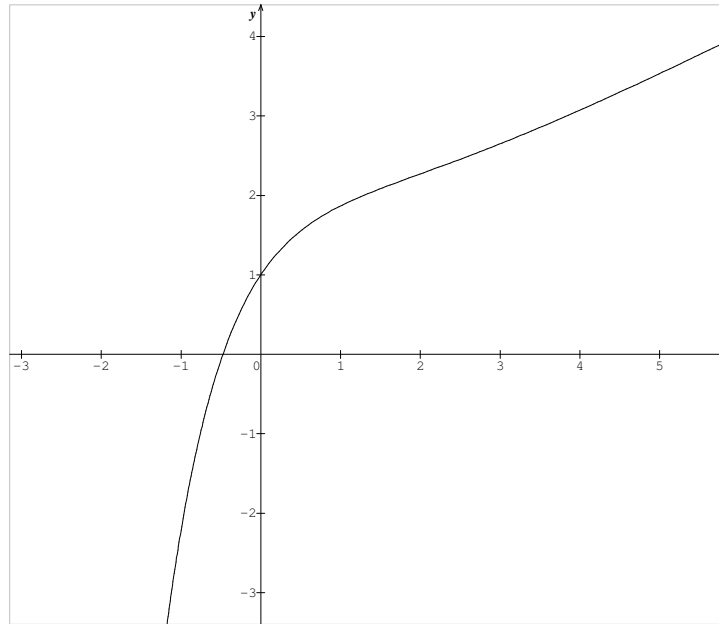
$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left( \frac{g(x)}{2e^x} \right)' \\
 &= \frac{g'(x) \times 2e^x - g(x) \times (2e^x)'}{(2e^x)^2} \\
 &= \frac{(e^x - 2) \times 2e^x - (e^x - 2x + 2) \times 2e^x}{(2e^x)^2} \\
 &= \frac{2e^x [e^x - 2 - e^x + 2x - 2]}{(2e^x)^2} \\
 &= \frac{2x - 4}{2e^x} \\
 &= \frac{x - 2}{e^x}
 \end{aligned}$$

إذن  $f''(x) = \frac{x-2}{e^x}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ لدينا  $e^x > 0$  إذن إشارة  $f''(x)$  هي إشارة  $x - 2$ 

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$

بما أن  $f''$  تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 2 فإن النقطة  $I(2; 2 + 2e^{-2})$  هي نقطة انعطاف للمنحنى  $(C_f)$ 

(4)



(5) باستعمال مكاملة بالأجزاء لنحسب :  $\int_0^2 xe^{-x} dx$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \quad \begin{matrix} \swarrow \\ \searrow \end{matrix} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \uparrow \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 xe^{-x} dx &= [-xe^{-x}]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x} dx \\ &= [-xe^{-x}]_0^2 - [e^{-x}]_0^2 \\ &= (-2e^{-2} - 0) - (e^{-2} - 1) \\ &= 1 - 3e^{-2} \\ &= 1 - \frac{3}{e^2} \end{aligned}$$

(6) مساحة الحيز المحصور بين  $(C_f)$  و محور الأفاسيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين  $x = 0$  و  $x = 2$ .

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 |f(x)| dx \cdot \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| \\
 &= \int_0^2 \left( \frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x} \right) dx \cdot 2cm \cdot 2cm \\
 &= \left( \int_0^2 \left( \frac{1}{2}x + 1 \right) dx + \int_0^2 xe^{-x} dx \right) \cdot 4cm^2 \\
 &= \left( \left[ \frac{x^2}{4} + x \right]_0^2 + \left( 1 - \frac{3}{e^2} \right) \right) \cdot 4cm^2 \\
 &= \left( 3 + 1 - \frac{3}{e^2} \right) \cdot 4cm^2 \\
 &= \left( 16 - \frac{12}{e^2} \right) cm^2
 \end{aligned}$$

تتبع

math.ma