

## مُدمج الدوال اللوغاريتمية والأسية

## السلسلة 1 (تمرينان)

## التمرين الأول :

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$  وليكن  $(C_f)$  منحناها في معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

$$(1) \text{ تحقق أن لكل } x \text{ من } \mathbb{R} : e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1, \text{ ثم حدد } D_f.$$

$$(2) \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ ثم حدد الفرع اللانهائي بجوار } -\infty$$

$$(3) \text{ أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$(4) \text{ تحقق أن لكل } x \text{ من } \mathbb{R} : f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) \text{ ثم بين أن } (C_f) \text{ يقبل مقارب بجوار } +\infty \text{ يتم تحديده}$$

$$(5) \text{ بين أن : } f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R}, \text{ ثم أدرس تغيرات } f \text{ وضع جدول تغيراتها.}$$

$$(6) \text{ بين أن : } f''(x) = \frac{-\sqrt{e^x} \left( (\sqrt{e^x} - 2)^2 - 2 \right)}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R}, \text{ ثم أدرس تقعر } (C_f) \text{ و حدد نقط الإنعطاف إن}$$

وجدت.

$$(7) \text{ مثل مبيانيا } (C_f).$$

$$(8) \text{ ناقش مبيانيا حسب قيم البارامتر } m \text{ عدد حلول المعادلة : } e^x - e^m = 2(-1 + \sqrt{e^x}) \text{ (} x \in \mathbb{R} \text{)}$$

$$(9) \text{ ليكن } g \text{ قصور } f \text{ على } [0, +\infty[$$

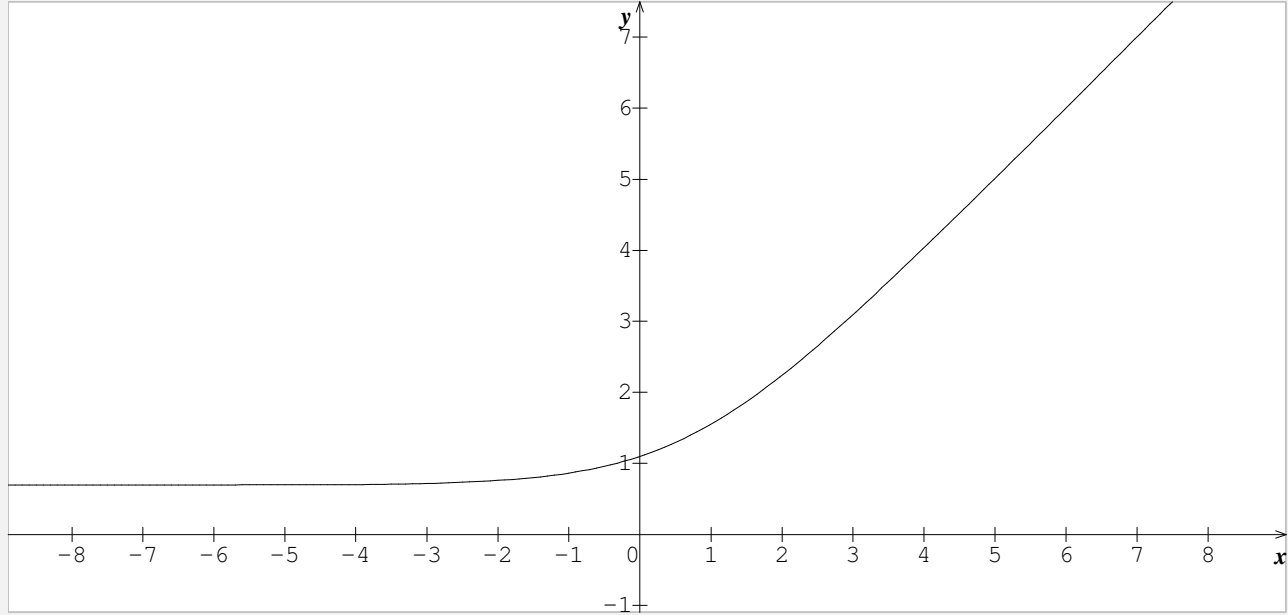
أ. بين أن  $g$  تقبل دالة عكسية  $g^{-1}$  معرفة من مجال  $J$  يتم تحديده

ب. حدد  $g^{-1}(x)$  لكل  $x$  من  $J$

ج. مثل في نفس المعلم السابق وبلون مغاير  $(C_{g^{-1}})$

## التمرين الثاني :

نعتبر الدالة  $f$  للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \ln(e^x + 2)$   
و ليكن  $(C_f)$  منحناها في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (أنظر الشكل)



## الجزء الأول

(1) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و أول النتيجة هندسيا

(2) أ- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- تحقق أن  $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-x})$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  ثم بين أن  $(C_f)$  يقبل مقارب مائل  $(\Delta)$  معادلته  $y = x$  بجوار  $+\infty$

(3) أدرس تغيرات  $f$  ثم ضع جدول تغيراتها

## الجزء الثاني

نضع  $I = \int_2^3 |f(x) - x| dx$

(1) أدرس الوضع النسبي ل  $(C_f)$  و  $(\Delta)$  و مثل  $(\Delta)$  في الشكل أعلاه

(2) اعط تأويلا هندسيا ل  $I$

(3) أ- بين أن لكل  $t$  من  $[0, +\infty[$  :  $\ln(1+t) \leq t$

ب- استنتج أن لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $\ln(1 + 2e^{-x}) \leq 2e^{-x}$

ج- بين أن :  $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-x} dx$

د- أحسب  $\int_2^3 2e^{-x} dx$  و استنتج تأطيروا ل  $I$  سعته 0,2

## تصحيح التمرين الأول

(1) ليكن  $x \in \mathbb{R}$ 

$$e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 \text{ لدينا :}$$

$$e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1: \mathbb{R} \text{ لكل } x \text{ من}$$

$$\text{من الواضح أن : } (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0 \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

إن

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = \ln 2 \quad (2)$$

لأن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = 2$  و الدالة  $\ln$  متصلة في 2.التأويل الهندسي :  $(C_f)$  يقبل مقاربا أفقيا معادلته  $y = \ln 2$  بجوار  $-\infty$ 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left((\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1\right) = +\infty \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right. \text{ لأن :}$$

(4) ليكن  $x \in \mathbb{R}$  ✓

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \\
 &= \ln\left(e^x \times \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)\right) \\
 &= \ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) \\
 &= x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)
 \end{aligned}$$

إن: لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) = \ln 1 = 0 \quad \checkmark$$

لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) = 1$  و الدالة  $\ln$  متصلة في 1.

التأويل الهندسي: ( $C_f$ ) يقبل مفارباتاً معادلته  $y = x$  بجوار  $+\infty$

(5) الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  (مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و  $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ )

ليكن  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \right)' \\ &= \frac{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)'}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{e^x - 2 \cdot \frac{(e^x)'}{2\sqrt{e^x}}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{e^x - \frac{e^x}{\sqrt{e^x}}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{e^x - \sqrt{e^x}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

لدينا :  $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$  و  $\sqrt{e^x} > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

إذن إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $\sqrt{e^x} - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{e^x} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\sqrt{(e^x)-1}$	$-$	$0$	$+$

جدول تغيرات  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$\ln 2$	$0$	$+\infty$

(6) ليكن  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left( \frac{\sqrt{e^x} (\sqrt{e^x} - 1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \right)' \\
 &= \left( \frac{e^x - \sqrt{e^x}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \right)' \\
 &= \frac{(e^x - \sqrt{e^x})' \cdot (e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) - (e^x - \sqrt{e^x}) \cdot (e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)'}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} \\
 &= \frac{\left( e^x - \frac{\sqrt{e^x}}{2} \right) \cdot (e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) - (e^x - \sqrt{e^x}) \cdot (e^x - \sqrt{e^x})}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} \\
 &= \frac{e^{2x} - 2e^x \sqrt{e^x} + 2e^x - \frac{e^x \sqrt{e^x}}{2} + e^x - \sqrt{e^x} - e^{2x} + 2\sqrt{e^x} e^x - e^x}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} \\
 &= \frac{2e^x - \frac{e^x \sqrt{e^x}}{2} - \sqrt{e^x}}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} \\
 &= \frac{-\frac{\sqrt{e^x}}{2} (-4\sqrt{e^x} + e^x + 2)}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} = \frac{-\sqrt{e^x} \left( (\sqrt{e^x})^2 - 4\sqrt{e^x} + 4 - 2 \right)}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } f''(x) = \frac{-\sqrt{e^x} \left( (\sqrt{e^x} - 2)^2 - 2 \right)}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} \quad \mathbb{R} \text{ لكل } x \text{ من}$$

لندرس تقعر  $(C_f)$  :

لدينا :  $\sqrt{e^x} > 0$  و  $2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2 > 0$  إذن إشارة  $f''(x)$  هي إشارة  $\left( (\sqrt{e^x} - 2)^2 - 2 \right)$

$x$	$-\infty$	$2\ln(2-\sqrt{2})$	$2\ln(2+\sqrt{2})$	$+\infty$	
$f''(x)$	-	0	+	0	-

على المجال  $]-\infty, 2\ln(2-\sqrt{2})]$  :  $f''(x) \leq 0$  إذن  $(C_f)$  مقعر

على المجال  $[2\ln(2-\sqrt{2}), 2\ln(2+\sqrt{2})]$  :  $f''(x) \geq 0$  إذن  $(C_f)$  محدب

على المجال  $[2\ln(2+\sqrt{2}), +\infty[$  :  $f''(x) \leq 0$  إذن  $(C_f)$  مقعر

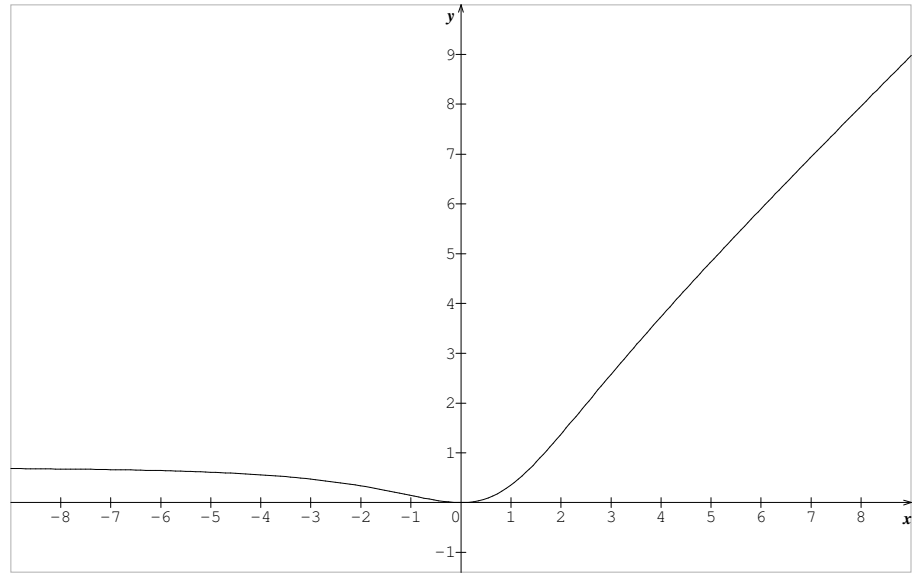
و بما أن  $f''$  تتعدم و تغير إشارتها عند  $2\ln(2-\sqrt{2})$  فإن النقطة  $I(2\ln(2-\sqrt{2}), f(2\ln(2-\sqrt{2})))$  هي نقطة

انعطاف

و كذلك  $f''$  تتعدم و تغير إشارتها عند  $2\ln(2+\sqrt{2})$  فإن النقطة  $J(2\ln(2+\sqrt{2}), f(2\ln(2+\sqrt{2})))$  هي نقطة

انعطاف

(7)



$$(8) \text{ المعادلة } e^x - e^m = 2(-1 + \sqrt{e^x}) \text{ تكافئ } (x \in \mathbb{R}) \quad e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = e^m$$

$$\text{تكافئ } (x \in \mathbb{R}) \quad \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = m$$

$$\text{تكافئ } (x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = m$$

✓ إذا كان  $m < 0$  : المعادلة لا تقبل حلا

✓ إذا كان  $m = 0$  : المعادلة لها حلا وحيدا

✓ إذا كان  $0 < m < \ln 2$  : المعادلة تقبل حلين

✓ إذا كان  $m \geq \ln 2$  : المعادلة لها حلا وحيدا

(9) أ- لدينا  $g$  متصلة و تزايدية قطعا على المجال  $[0, +\infty[$  ( لأن  $g$  قصور  $f$  على المجال  $[0, +\infty[$  )

إذن  $g$  تقبل دالة عكسية  $g^{-1}$  معرفة من المجال  $[0, +\infty[$  معرفة من المجال  $J = g([0, +\infty[) = [0, +\infty[$  نحو

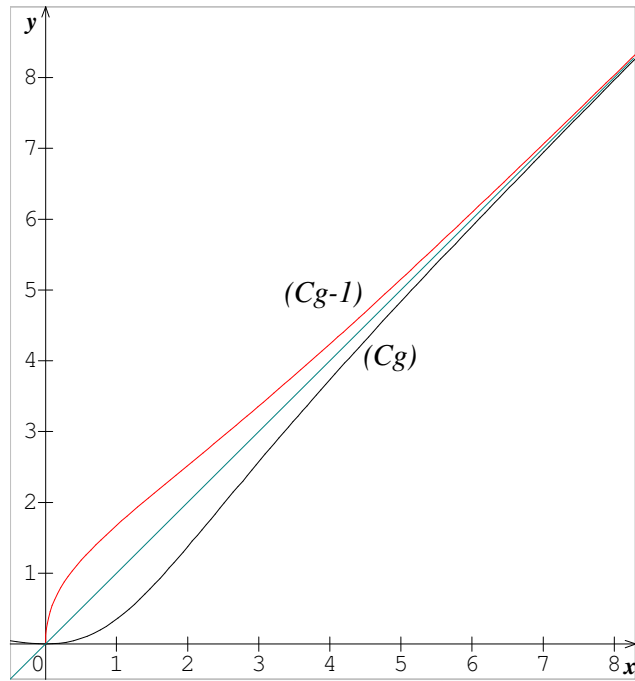
ب- ليكن  $x \in [0, +\infty[$  :



$$\begin{aligned}
y = g^{-1}(x) & \Leftrightarrow x = g(y) \\
& \Leftrightarrow x = \ln\left(\left(\sqrt{e^y} - 1\right)^2 + 1\right) \\
& \Leftrightarrow e^x = \left(\sqrt{e^y} - 1\right)^2 + 1 \\
& \Leftrightarrow e^x - 1 = \left(\sqrt{e^y} - 1\right)^2 \\
& \Leftrightarrow \left|\sqrt{e^y} - 1\right| = \sqrt{e^x - 1} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{e^y} - 1 = \sqrt{e^x - 1} \quad (y \geq 0) \\
& \Leftrightarrow \sqrt{e^y} = 1 + \sqrt{e^x - 1} \\
& \Leftrightarrow e^y = \left(1 + \sqrt{e^x - 1}\right)^2 \\
& \Leftrightarrow y = \ln\left(\left(1 + \sqrt{e^x - 1}\right)^2\right) \\
& \Leftrightarrow y = 2\ln\left(1 + \sqrt{e^x - 1}\right)
\end{aligned}$$

$$g^{-1}(x) = 2\ln\left(1 + \sqrt{e^x - 1}\right) : [0, +\infty[ \text{ من } x \text{ لكل}$$

ج



math.ma

الجزء الأول :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 2) = \ln(2) \quad (1)$$

لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 2 = 2$  و  $\left( \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \right)$  متصلة في  $\ln$  و الدالة  $\ln$  متصلة في  $2$   
التأويل الهندسي:  $(C_f)$  يقبل مقاربا أفقيا معادلته  $y = \ln 2$  بجوار  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 2) = +\infty \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right. \text{ لأن :}$$

ب- ليكن  $x \in \mathbb{R}$

✓

$$f(x) = \ln(e^x + 2) = \ln\left(e^x \left(1 + \frac{2}{e^x}\right)\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1 + \frac{2}{e^x}\right) = x + \ln(1 + 2e^{-x})$$

إذن:  $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-x})$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^{-x}) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \ln(1 + 2e^t) = \ln(1) = 0 \quad \checkmark$$

لأن:  $\lim_{t \rightarrow -\infty} 1 + 2e^t = 1$  و الدالة  $\ln$  متصلة في  $1$

التأويل الهندسي:  $(C_f)$  يقبل مقاربا مائلا معادلته  $y = x$  بجوار  $+\infty$

(3) لندرس تغيرات الدالة  $f$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  (مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و  $e^x + 2 > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ )

ليكن  $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (\ln(e^x + 2))' = \frac{(e^x + 2)'}{e^x + 2} = \frac{e^x}{e^x + 2}$$

من الواضح أن  $f'(x) > 0$  ( $e^x > 0$ )

إذن  $f$  تزايدية قطعا على  $\mathbb{R}$

جدول تغيرات  $f$ :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\ln 2$	$+\infty$

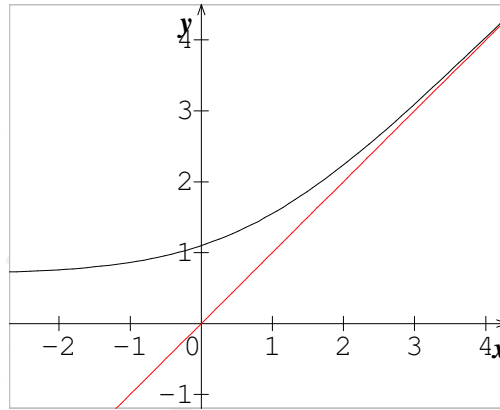
**الجزء الثاني :**

(1) ليكن  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - x = \ln(1 + 2e^{-x})$$

نعلم أن  $2e^{-x} > 0$  إذن  $1 + 2e^{-x} > 1$  إذن  $\ln(1 + 2e^{-x}) > 0$  إذن  $f(x) - x > 0$

ومنه  $(C_f)$  يوجد فوق  $(\Delta)$



(2) التكامل  $I = \int_2^3 |f(x) - x| dx$  هو مساحة الحيز المحصور بين  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = x$  و

المستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = 2$  و  $x = 3$

(3) -أ- لنبين أن لكل  $t \in [0, +\infty[$  :  $\ln(1+t) \leq t$

نعتبر الدالة  $u : t \mapsto \ln(1+t) - t$

$$u'(t) = (\ln(1+t) - t)' = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{1-1-t}{1+t} = \frac{-t}{1+t}$$

لدينا  $t \geq 0$  إذن  $\frac{-t}{1+t} \leq 0$  إذن  $u'(t) \leq 0$  و منه الدالة  $u$  تناقصية

وبما أن  $t \geq 0$  فإن  $u(t) \leq u(0)$

و بالتالي :  $\ln(1+t) - t \leq 0$

نستنتج أن لكل  $t \in [0, +\infty[$  :  $\ln(1+t) \leq t$

ب- لدينا لكل  $t \in [0, +\infty[$  :  $\ln(1+t) \leq t$

و بنا أن لكل  $x \in \mathbb{R}$  :  $2e^{-x} > 0$

$$\text{فإن : } \ln(1+2e^{-x}) \leq 2e^{-x}$$

ج- لدينا : لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :  $0 \leq \ln(1+2e^{-x}) \leq 2e^{-x}$

$$\text{إذن } 0 \leq \int_2^3 \ln(1+2e^{-x}) dx \leq \int_2^3 2e^{-x} dx$$

$$(f(x) - x = \ln(1+2e^{-x}) > 0)$$

$$\text{و منه } 0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-x} dx$$

-د

$$\int_2^3 2e^{-x} dx = 2 \int_2^3 e^{-x} dx = 2[-e^{-x}]_2^3 = 2(e^{-2} - e^{-3}) \quad \checkmark$$

$$0 \leq I \leq 2(e^{-2} - e^{-3}) \quad \checkmark$$

$$0 \leq I \leq 2(e^{-2} - e^{-3}) \leq 0,2$$

و هذا تأطير سعته 0,2

つづく

math.ma