الأعداد العقدية

1. تقديم و تعاريف :

- ❖ **توجد مجموعة يرمز لها ب** $\mathbb{C}$ **و تسمى مجموعة الأعداد العقدية و تحقق** $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
  و هي تحتوي على عدد نرمز له ب i **حيث** $i^2 = -1$
- ❖ **كل عدد** z **من** $\mathbb{C}$ **يكتب على شكل** $z = a + ib$ **مع** $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
- ❖ **العدد** a **يسمى الجزء الحقيقي و نرمز له ب** $\Re e(z)$
- ❖ **العدد** b **يسمى الجزء التخيلي و نرمز له ب** $\operatorname{Im}(z)$
- ❖ **الكتابة** $z = a + ib$ **مع** $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ **تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي** z
- ❖ **إذا كان** $z = ib$ **حيث** $b \in \mathbb{R}$ **نقول أن** z **تخيلي صرف و نكتب** $z \in i\mathbb{R}$

2. خاصيات :

ليكن $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ **لدينا :**

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$
- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases}$
- $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 0 \\ \operatorname{Im}(z) = 0 \end{cases}$

العمليات في $\mathbb{C}$

ليكن $z = a + ib$ **و** $z' = a' + ib'$

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- $-z = -a - ib$
- $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$
- **جميع خصائص الجداء و الجمع في** $\mathbb{R}$ **تبقى صالحة في** $\mathbb{C}$
- $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

- $(a-ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$
- $(a-ib)(a+ib) = a^2 + b^2$

3. مرافق عدد عقدي

تعريف :

مرافق العدد العقدي $z = a+ib$ **مع** $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ **هو العدد العقدي** $\overline{z} = a - ib$

خاصيات المرافق

ليكن z_1 **و** z_2 **عددين عقديين**

- ✓ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- ✓ $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- ✓ $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{1}{\overline{z_1}}$ $(z_1 \neq 0)$
- ✓ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- ✓ $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ **حيث** $n \in \mathbb{Z}$ **و** $z \in \mathbb{C}$

نتائج :

- $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

4. معيار عدد عقدي :

معيار العدد العقدي $z = a+ib$ **مع** $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ **هو العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب :** $|z|$ **و هو معرف بما يلي :**

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

خاصيات :

ليكن z **و** z' **عددين عقديين**

- ✓ $|z| = \sqrt{z.\overline{z}}$
- ✓ $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- ✓ $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ $(z \neq 0)$

✓ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0)$

✓ $|z^n| = |z|^n$ **حيث** $n \in \mathbb{Z}$

✓ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

5. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

أ. عمدة عدد عقدي غير منعدم :

ليكن $z = x + iy$ **من** $\mathbb{C}^*$ **حيث** x **و** y **من** $\mathbb{R}$

كل عدد حقيقي θ **بحيث :** $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$ **يسمى عمدة ل** z **و نكتب :** $\arg(z) = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

أو $\arg(z) \equiv \theta[2\pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$

ب. خاصيات العمدة:

ليكن z_1 **و** z_2 **عددين عقديين غير منعدمين**

✓ $\arg(\overline{z_1}) \equiv -\arg(z_1)[2\pi]$

✓ $\arg(z_1 \times z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$

✓ $\arg\left(\dfrac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg(z_1)[2\pi]$

✓ $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$

✓ $\arg(z_1^n) \equiv n\arg(z_1)[2\pi]$ **حيث** $n \in \mathbb{Z}$

6. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

تعريف :

كل عدد عقدي z غير منعدم يكتب على شكل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
حيث $|z| = r$ و $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

خاصيات الشكل المثلثي :

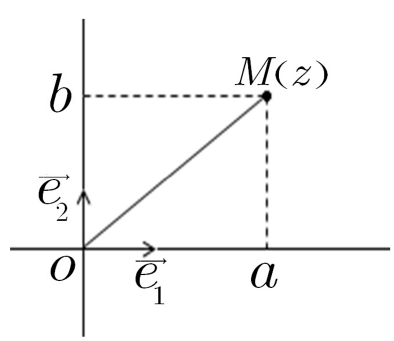
- $\overline{r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))} = r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$
- $r(\cos\theta+i\sin\theta)\times r'(\cos\theta'+i\sin\theta') = rr'(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta'))$
- $\dfrac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)} = \dfrac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$
- $\dfrac{r(\cos\theta+i\sin\theta)}{r'(\cos\theta'+i\sin\theta')} = \dfrac{r}{r'}(\cos(\theta-\theta')+i\sin(\theta-\theta'))$
- $(r(\cos\theta+i\sin\theta))^n = r^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ (علاقة موافر)

7. تأويلات هندسية للأعداد العقدية :

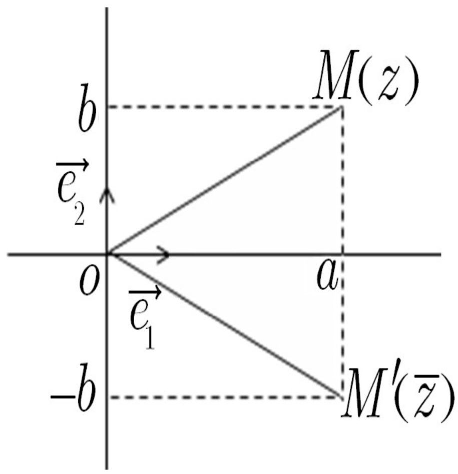
تعاريف:

في المستوى (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$
لتكن النقطة $M(a,b)$

- العدد العقدي $z = a+ib$ $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ يسمى لحق النقطة M
- النقطة $M(a,b)$ تسمى صورة العدد $z = a+ib$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

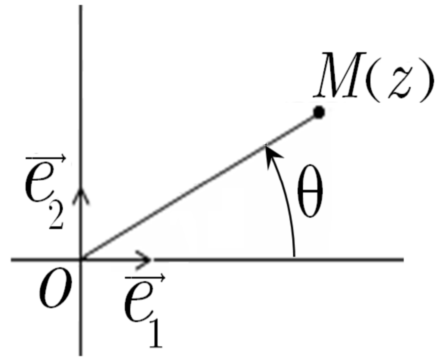


- مرافق $z=a+ib$ هو $\overline{z}=a-ib$

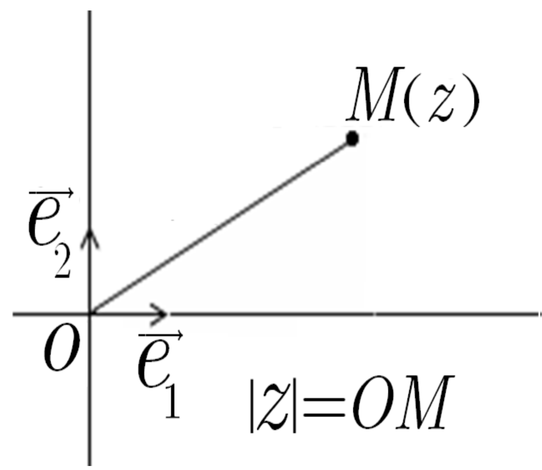


- لدينا كذلك $z=a+ib$ هو لحق المتجهة $\overrightarrow{U}(a,b)$
- المستوى (P) يسمى المستوى العقدي
- $(O,\overrightarrow{e_1})$ يسمى المحور الحقيقي
- $(O,\overrightarrow{e_2})$ يسمى المحور التخيلي
- $\overrightarrow{OM}=a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}$ و نكتب $z_M=a+ib$ أو $aff(M)=a+ib$

❖ ليكن $z=a+ib$ لحق النقطة M من المستوى العقدي لدينا : $\arg(z)\equiv\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$



❖ **المسافة** OM : $OM = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$



المسافة AB :
لتكن A **و** B **نقطتان لحقاهما على التوالي** z_A **و** z_B
لدينا : $AB = |z_B - z_A|$

خاصيات :

لتكن A **و** B **نقطتان لحقاهما على التوالي** z_A **و** z_B

و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان من المستوى العقدي (P) :

- لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو : $z_B - z_A$
- لحق المتجهة $\vec{u}+\vec{v}$ هو : $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$
- لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ هو : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$
- M نقطة لدينا :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow z_M = z_A + z_B$$
$$\overrightarrow{OM} = \alpha.\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow z_M = \alpha . z_A$$

- لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ و $D(z_D)$ نقط مختلفة مثنىمثنى
  - A و B و C مستقيمية $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
  - $(AB)//(DC) \Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
    $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi]$
  - $(AB)\perp(DC) \Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
    $\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$
  - النقط A و B و C و D متداورة $\Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \dfrac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

قياس الزوايا :

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ و $D(z_D)$

- $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \arg(z_A)[2\pi]$ حيث $O \neq A$
- $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$ حيث $A \neq B$
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$ حيث $A \neq B$ و $A \neq C$
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$
  حيث $A \neq B$ و $C \neq D$

8. الشكل الأسي لعدد عقدي :

تعريف :

كل عدد عقدي غير منعدم يكتب على شكله الأسي ب: $z = re^{i\theta}$
حيث $|z| = r$ **و** $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

خاصيات :

- ✓ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- ✓ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- ✓ $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- ✓ $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- ✓ $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- ✓ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

صيغ أولير

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

9. الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم

❖ ليكن Z من $\mathbb{C}$ و n من $\mathbb{N}^* - \{1\}$

نسمي الجذر النوني للعدد Z أو الجذر من الرتبة n للعدد Z كل عدد عقدي z يحقق $z^n = Z$

- ❖ ليكن $Z = re^{i\theta}$ $(r>0)$

العدد Z يقبل n جذر نوني و هذه الجذور النونية تكتب على شكل : $z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ بحيث $k \in \{0,1,2,........,n-1\}$

- ❖ صور الجذور النونية للعدد Z تكون مضلعا منتظما ذو n ضلع محاطا بالدائرة التي مركزها O وشعاعها $\sqrt[n]{r}$
- ❖ الجذور النونية للعدد 1 هي الأعداد : $w_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$ بحيث $k \in \{0,1,2,........,n-1\}$ و تسمى الجذور من الرتبة n للوحدة
- ❖ ليكن Z من $\mathbb{C}^*$ و a أحد الجذور النونية للعدد Z

نحصل على الجذور النونية للعدد Z بضرب a في الجذور النونية للوحدة

10. الجذور المربعة لعدد عقدي غير منعدم

أ. الطريقة المثلثية :

ليكن $Z = re^{i\theta}$ $(r>0)$

الجذران المربعان للعدد Z هما : $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ و $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$

ب. الطريقة الجبرية :

1) إذا كان $Z \in \mathbb{R}_+^*$: $\sqrt{Z}$ و $-\sqrt{Z}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

2) إذا كان $Z \in \mathbb{R}_-^*$: $i\sqrt{-Z}$ و $-i\sqrt{-Z}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

3) إذا كان $Z \in i\mathbb{R}_+^*$ $\left(b \in \mathbb{R}_+^*\right)$ $Z = ib$: $(1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-(1+i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

4) إذا كان $Z \in i\mathbb{R}_-^*$ $\left(b \in \mathbb{R}_-^*\right)$ $Z = ib$: $(1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ و $-(1-i)\sqrt{\frac{b}{2}}$ هما الجذران المربعان للعدد Z

5) إذا كان $Z = a+ib$ ($a \neq 0$ و $b \neq 0$) :

- ❖ إذا كان $b>0$:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

و $$-\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}-i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

هما الجذران المربعان للعدد Z

❖ إذا كان $b<0$:

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}-i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

و $$-\sqrt{\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

هما الجذران المربعان للعدد Z

11. المعادلات من الدرجة الثانية :

نعتبر المعادلة $az^2+bz+c=0$ $(a\neq 0)$

حل المعادلة $az^2+bz+c=0$

$$\Delta=b^2-4ac$$

- **إذا كان $\Delta=0$:**

فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو : $z=\frac{-b}{2a}$

- إذا كان $\Delta\neq 0$:

فإن Δ يقبل جذرين مربعين هما μ و $-\mu$ و يكون للمعادلة حلين هما :

$z=\frac{-b-\mu}{2a}$ أو $z=\frac{-b+\mu}{2a}$

ملاحظة : **إذا كان** z_1 و z_2 هما حلي المعادلة $az^2+bz+c=0$ فإن :

$$\begin{cases} z_1+z_2=\dfrac{-b}{a} \\ z_1\times z_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

12. التحويلات الإعتيادية :

نعتبر تحويلا في المستوى يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$

- **الكتابة العقدية للإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ هي :** $z'=z+z_{\vec{u}}$
- **الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و نسبته k هي :** $z'-\omega=k(z-\omega)$
- **الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و زاويته θ هي :** $z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$

نعتبر التطبيق : $\begin{array}{rccc} f: & P & \mapsto & P \\ & M(z) & \mapsto & M'(z') \end{array}$ حيث $z'=az+b$

- إذاكان $a=1$:

فإن f إزاحة متجهتها $\vec{u}$ ذات اللحق b

- إذا كان $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$:

فإن f تحاكي مركزه Ω لحقه $\dfrac{b}{1-a}$ و نسبته a

(Ω هي النقطة الصامدة بالتحويل f أي $f(\Omega)=\Omega$ ويتم تحديد لحقها بحل المعادلة $z=az+b$)

- إذاكان $a\in\mathbb{C}^*-\{1\}$ حيث $|a|=1$:

فإن f دوران مركزه Ω لحقه $\dfrac{b}{1-a}$ و زاويته $\arg(a)$

(Ω هي النقطة الصامدة بالتحويل f أي $f(\Omega)=\Omega$ ويتم تحديد لحقها بحل المعادلة $z=az+b$)

- إذاكان $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ حيث $|a| \neq 1$:

فإن $f = h \circ r$

حيث : h هو التحاكي الذي مركزه Ω لحقه $\dfrac{b}{1-a}$ و نسبته $|a|$

و r هو الدوران مركزه Ω لحقه $\dfrac{b}{1-a}$ و زاويته $\arg(a)$

ملاحظات :

- إذا كان r دوران مركزه Ω و زاويته θ فإن r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r له نفس المركز و زاويته $-\theta$
- التحاكي الذي نسبته -1 هو تماثل مركزي