الثانية عُلوم تجريبية

امتحان وَطني أبيَــض

(إعداد الأستاذ اسماعيل بلعناب وتصحيح الموقع)

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، النقط $A\left(1,2,-2\right)$ و $B\left(0,3,-3\right)$ و $C\left(1,1,-2\right)$ و المستوى $\left(P\right)$ الذي معادلته $x+y-3=0$

1) أ- أحسب مسافة النقطة $\Omega\left(0,1,-1\right)$ عن المستوى $\left(P\right)$

ب- استنتج أن معادلة ديكارتية للفلكة $\left(S\right)$ التي مركزها Ω و المماسة للمستوى $\left(P\right)$ هي :

$$x^2+y^2+z^2-2y+2z=0$$

2) أ- حدد $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ، ثم استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية .

ب- بين أن $x-z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $\left(ABC\right)$

3) أ- تحقق من أن الفلكة $\left(S\right)$ مماسة للمستوى $\left(ABC\right)$

ب- أحسب المسافة ΩC و استنتج نقطة تماس $\left(S\right)$ و المستوى $\left(ABC\right)$

التمرين الثاني : (3 ن)

I.

1) تحقق من أن $z^3+8=\left(z+2\right)\left(z^2-2z+4\right)$ لكل z من $\mathbb{C}$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3+8=0$

II. نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a=-2$ و $b=1+i\sqrt{3}$ و $c=1-i\sqrt{3}$.

1) أكتب العددين b و c على الشكل المثلثي

2) أكتب العدد $\dfrac{b}{c}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج زاوية الدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة C إلى النقطة B .

3) أ- حدد الكتابة العقدية للتحاكي h الذي مركزه A و نسبته -2

ب- حدد d لحق النقطة D صورة النقطة B بالتحاكي h .

4) حدد مجموعة النقط $M\left(z\right)$ من المستوى التي تحقق: $\left|iz+2i\right|=\left|\bar{z}-1-i\sqrt{3}\right|$.

التمرين الثالث : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{u_n + 1}$ $(n \in \mathbb{N})$

و نضع $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n > 2$

2) أ- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 2)^2}{u_n + 1}$

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) تناقصية ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3) أ- بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\dfrac{1}{3}$

ب- أكتب v_n ثم u_n بدلالة n

ج- أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

التمرين الرابع : (3 ن)

يحتوي صندوق على ثلاث كرات سوداء و أربع كرات بيضاء و كرة واحدة صفراء .
نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

1) أحسب احتمال الأحداث التالية :

A " سحب كرة من كل لون "
B " سحب ثلاث كرات من نفس اللون "
C " سحب لونين فقط "
D " سحب الكرة الصفراء "

2) أحسب احتمال الحصول على لونين فقط علما أن الكرة الصفراء سحبت

3) نعيد التجربة السابقة خمس مرات مع إعادة الكرات المسحوبة إلى الصندوق في كل مرة .
ما هو احتمال تحقق الحدث A مرة على الأقل .

مسألة : (5 ن)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة g

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,+\infty[$ بحيث $-0,34 < \alpha < -0,33$

3) استنتج إشارة $g(x)$ لكل x من المجال $]-1,+\infty[$

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = \dfrac{e}{x+1} + \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1cm$.

1) أ- بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$ و أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب- اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين

2) أ- بين أن لكل x من المجال $]-1,+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f

3) أ- اعط معادلة المماس (T) في النقطة ذات الأفصول 0

ب- أنشئ (C_f) و (T) (نقبل أن $f(2) \simeq 1$ و $f(\alpha) \simeq 3,16$

4) أ- بين أن الدالة $H : x \mapsto \dfrac{-1}{x+1}\left[1 + \ln(x+1)\right]$

هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1,+\infty[$

ب- أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي: $x = 0$ و $x = 1$

ج- استنتج القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0,1]$

5) نعتبر الدالة العددية k المعرفة على المجال $]-1,1[$ بما يلي : $k(x) = f(|x|)$

و ليكن (C_k) تمثيلها المبياني في المعلم السابق .

أ- بين أن الدالة k زوجية

ب- أنسئ (C_k)

ج- مبيانيا ، ناقش حسب قيم m ، عدد حلول المعادلة $k(x) = m$ (حيث m عدد حقيقي)

تصحيح التمرين الأول

1) أ- $d\left(\Omega,(P)\right)=\dfrac{\left|(0)+(1)-3\right|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

ب- بما أن (S) مماسة للمستوى (P) فإن $d\left(\Omega,(P)\right)=R$ (حيث R هو شعاع الفلكة (S))

و لدينا $\Omega(0,1,-1)$ هو مركز الفلكة (S)

إذن معادلة ديكارتية للفلكة (S) تكتب على شكل :

$$\left(x-(0)\right)^2+\left(y-(1)\right)^2+\left(z-(-1)\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$$

$$x^2+y^2-2y+1+z^2+2z+1=2$$

$$x^2+y^2+z^2-2y+2z=0$$

2) أ-

✓ لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1,1,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,-1,0)$

إذن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$

إذن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-1)\vec{i}-(0)\vec{j}+(1)\vec{k}$

و منه : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-\vec{i}+\vec{k}$

✓ بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فإن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتين
و منه فإت النقط A و B و C غير مستقيمية .

ب- لدينا : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب غلى شكل : $(-1)x+(0)y+(1)z+d=0$

و لدينا : $B(0,3,-3)\in(ABC)$

إذن : $(-1)(0)+(0)(3)+(1)(-3)+d=0$ و منه $d=3$

إذن المعالدلة تصبح : $-x+z+3=0$

و بالتالي : $x-z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

3) أ-

✓ $d\left(\Omega,(ABC)\right)=\dfrac{\left|(0)-(-1)-3\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

✓ بما أن $d\left(\Omega,(ABC)\right)=R$ فإن (S) مماسة للمستوى (ABC)

ب-

✓ $\Omega C=\sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(-1-(-1))^2}=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

✓ بما أن $\Omega C=R$ فإن $C\in(S)$ و لدينا كذلك $C\in(ABC)$ إذن : $C\in(ABC)\cap(S)$

و بالتالي نقطة تماس (S) و (ABC) هي النقطة C .

تصحيح التمرين الثاني

.I

1) ليكن $z\in\mathbb{C}$:

لدينا :

$$\begin{aligned} z^3+8 &= z^3+2^3 \\ &=(z+2)(z^2-2.z+2^2) \\ &=(z+2).(z^2-2z+4) \end{aligned}$$

إذن : $z^3+8=(z+2)(z^2-2z+4)$ لكل z من $\mathbb{C}$

2) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3+8=0$

$z^3+8=0$ تعني $(z+2)(z^2-2z+4)=0$

تعني $z^2-2z+4=0$ أو $z+2=0$

تعني $z^2-2z+4=0$ أو $z=-2$

- لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$

لدينا : $\Delta=-12$ إذن $\Delta<0$ و منه المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين

$$z=\frac{-(-2)+i\sqrt{12}}{2(1)} \quad \text{أو} \quad z=\frac{-(-2)-i\sqrt{12}}{2(1)}$$

$$z=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2} \quad \text{أو} \quad z=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}$$

$$z=1+i\sqrt{3} \quad \text{أو} \quad z=1-i\sqrt{3}$$

- $z^3+8=0$ تعني $z=1+i\sqrt{3}$ أو $z=1-i\sqrt{3}$ أو $z=-2$

و منه : $S=\{-2,1-i\sqrt{3},1+i\sqrt{3}\}$

II

1)

✓ لدينا : $|b| = |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

✓ لنكتب العدد b على شكله المثلثي :

$$b = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

لنكتب العدد c على شكله المثلثي :

$$c = 1-i\sqrt{3} = \overline{b} = \overline{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)} = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)$$

2)

✓ $$\frac{b}{c} = \frac{2.e^{\frac{i\pi}{3}}}{2.e^{\frac{-i\pi}{3}}} = \frac{2}{2}.e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)} = 1.e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

✓ لتكن θ زاوية الدوران R الذي مركزه O

لدينا $R(C) = B$

إذن $b-0 = e^{i\theta}(c-0)$

إذن : $b = e^{i\theta}.c$

إذن $\frac{b}{c} = e^{i\theta}$

و نعلم أن $\frac{b}{c} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

و منه زاوية الدوران هي $\frac{2\pi}{3}$

3) أ- لنحدد الكتابة العقدية للتحاكي h الذي مركزه A **و نسبته** -2

$$z'-a = -2.(z-a)$$
$$z'-(-2) = -2.(z-(-2))$$
$$z'+2 = -2.(z+2)$$
$$z'+2 = -2z-4$$
$$z' = -2z-6$$

ب- لنحدد d لحق النقطة D صورة النقطة B بالتحاكي h

$$\begin{aligned} d &= -2b-6 \\ &= -2\left(1+i\sqrt{3}\right)-6 \\ &= -8-2i\sqrt{3} \end{aligned}$$

(4

$$\left|iz+2i\right| = \left|\overline{z}-1-i\sqrt{3}\right|$$

$$\left|i\left(z+2\right)\right| = \left|\overline{z}-\left(1+i\sqrt{3}\right)\right|$$

$$\left|i\right|.\left|z+2\right| = \left|\overline{z-\left(1-i\sqrt{3}\right)}\right|$$

$$1.\left|z+2\right| = \left|z-\left(1-i\sqrt{3}\right)\right|$$

$$\left|z-\left(-2\right)\right| = \left|z-\left(1-i\sqrt{3}\right)\right|$$

$$\left|z-a\right| = \left|z-c\right|$$

$$AM = CM$$

إذن مجموعة النقط $M\left(z\right)$ من المستوى التي تحقق: $\left|iz+2i\right| = \left|\overline{z}-1-i\sqrt{3}\right|$ هي واسط القطعة $\left[AC\right]$

تصحيح التمرين الثالث

(1

- ✓ من أجل $n=0$:
  لدينا $u_0=3$
  إذن $u_0>2$
- ✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$:
  - نفترض أن $u_n>2$
  - و نبين أن $u_{n+1}>2$

$$u_{n+1}-2 = \frac{5u_n-4}{u_n+1}-2$$
$$=\frac{5u_n-4-2u_n-2}{u_n+1}$$
$$=\frac{3u_n-6}{u_n+1}$$
$$=\frac{3(u_n-2)}{u_n+1}$$

لدينا حسب الإفتراض $u_n>2$

إذن : $u_n-2>0$ و $u_n+1>3>0$

إذن : $\frac{3(u_n-2)}{u_n+1}>0$

إذن : $u_{n+1}-2>0$

إذن : $u_{n+1}>2$

- ✓ نستنتج أن : لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n>2$

2) أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$:
لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{5u_n-4}{u_n+1}-u_n \\ &= \frac{5u_n-4-u_n^2-u_n}{u_n+1} \\ &= \frac{-u_n^2+4u_n-4}{u_n+1} \\ &= \frac{-\left(u_n^2-4u_n+4\right)}{u_n+1} \\ &= \frac{-\left(u_n-2\right)^2}{u_n+1} \end{aligned}$$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-\left(u_n-2\right)^2}{u_n+1}$

ب-

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

من الواضح أن : $-\left(u_n-2\right)^2<0$ و $u_n+1>0$

إذن : $\dfrac{-\left(u_n-2\right)^2}{u_n+1}<0$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n<0$

و منه المتتالية $\left(u_n\right)$ تناقصية.

✓ بما أن $\left(u_n\right)$ تناقصية و مصغورة فإنها متقاربة .

3) أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$:
لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}-2} \\ &= \frac{1}{\dfrac{3\left(u_n-2\right)}{u_n+1}} \\ &= \frac{u_n+1}{3\left(u_n-2\right)} \end{aligned}$$

$$v_{n+1}-v_n = \frac{u_n+1}{3(u_n-2)}-\frac{1}{u_n-2}$$
$$= \frac{u_n+1-3}{3(u_n-2)}$$
$$= \frac{u_n-2}{3(u_n-2)} = \frac{1}{3}$$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}-v_n = \frac{1}{3}$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $r=\frac{1}{3}$.

ب- ليكن $n\in\mathbb{N}$:

✓ لدينا (v_n) هندسية أساسها $r=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=\frac{1}{u_0-2}=\frac{1}{3-2}=\frac{1}{1}=1$

إذن : $v_n = v_0 + n\times r$

إذن : $v_n = 1 + n\times\frac{1}{3}$

و منه : لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{3+n}{3}$

✓ لدينا : $v_n = \frac{1}{u_n-2}$

إذن : $u_n - 2 = \frac{1}{v_n}$

إذن : $u_n = 2 + \frac{1}{v_n}$

إذن : $u_n = 2 + \frac{1}{\frac{3+n}{3}}$

إذن : $u_n = 2 + \frac{3}{3+n} = \frac{2n+9}{n+3}$

و منه : لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{2n+9}{n+3}$

ج- $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n+9}{n+3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n} = 2$$

تصحيح التمرين الرابع

التجربة " سحب بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق "
ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة
لدينا $card\,\Omega = A_8^3 = 336$

1)

✓ A " سحب كرة من كل لون "

$$\begin{cases} N & B & J \\ N & J & B \\ B & N & J \\ B & J & N \\ J & B & N \\ J & N & B \end{cases}$$

لدينا : $cardA = 6\times\left(A_3^1\times A_4^1\times A_1^1\right) = 72$

إذن : $p\left(A\right) = \dfrac{cardA}{card\,\Omega} = \dfrac{72}{336} = \dfrac{3}{14}$

✓ B " سحب ثلاث كرات من نفس اللون "

$B \quad B \quad B$ أو $N \quad N \quad N$

لدينا : $cardB = A_4^3 + A_3^3 = 24 + 6 = 30$

إذن : $p\left(B\right) = \dfrac{cardB}{card\,\Omega} = \dfrac{30}{336} = \dfrac{5}{56}$

✓ C " سحب لونين فقط "

$$p\left(C\right) = 1 - p\left(A\cup B\right) = 1 - p\left(A\right) - p\left(B\right) = \frac{234}{336} = \frac{39}{56}$$

✓ D " سحب الكرة الصفراء "

$$\begin{cases} J & \overline{J} & \overline{J} \\ \overline{J} & J & \overline{J} \\ \overline{J} & \overline{J} & J \end{cases}$$

لدينا : $cardD = 3\times\left(A_1^1\times A_7^2\right) = 168$

إذن : $p\left(D\right) = \dfrac{cardD}{card\,\Omega} = \dfrac{168}{336} = \dfrac{1}{2}$

2) لنحسب احتمال الحصول على لونين فقط علما أن الكرة الصفراء سحبت

لدينا : $$p_D(C)=\frac{p(C\cap D)}{p(D)}$$

ولدينا $C\cap D$ " سحب لونين فقط و الكرة الصفراء مسحوبة "

$$\begin{cases} J & N & N \\ N & J & N \\ N & N & J \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} J & B & B \\ B & J & B \\ B & B & J \end{cases}$$

لدينا $card(C\cap D)=3\times\left(A_1^1\times A_3^2\right)+3\times\left(A_1^1\times A_4^2\right)=54$

إذن $$p(C\cap D)=\frac{card(C\cap D)}{card\,\Omega}=\frac{54}{336}$$

و لدينا $$p(D)=\frac{168}{336}$$

إذن $$p_D(C)=\frac{p(C\cap D)}{p(D)}=\frac{\frac{54}{336}}{\frac{168}{336}}=\frac{54}{168}=\frac{9}{28}$$

3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يحدد عدد مرات تحقق الحدث A

X متغير عشوائي حداني وسيطاه $n=5$ (عدد مرات إعادة التجربة السابقة) و $p=\frac{3}{14}$ ($p=p(A)$ احتمال A)

لدينا : $$p(X=k)=C_5^k\left(\frac{3}{14}\right)^k\left(1-\left(\frac{3}{14}\right)\right)^{5-k}\quad 0\le k\le 5$$

لنحسب احتمال تحقق الحدث A مرة على الأقل أي $p(X\ge 1)$:

$$p(X\ge 1)=1-p(X<1)=1-p(X=0)=1-\left(C_5^0\left(\frac{3}{14}\right)^0\left(1-\frac{3}{14}\right)^5\right)=1-\left(\frac{11}{14}\right)^5$$

تصحيح المسألة

.I

(1

✓ لندرس تغيرات الدالة g :

لدينا g قابلة للإشتقاق على المجال $]-1,+\infty[$:

ليكن $x \in]-1,+\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(-1+(x+1)e+2\ln(x+1)\right)' \\ &= 0+e+2.\frac{(x+1)(}{x+1} \\ &= e+\frac{2}{x+1} \end{aligned}$$

إذن لكل x من المجال $]-1,+\infty[$: $g'(x)=e+\dfrac{2}{x+1}$

لدينا $x>-1$ إذن $x+1>0$

إذن من الواضح أن : لكل x من المجال $]-1,+\infty[$: $g'(x)>0$

و منه الدالة g تزايدية قطعا على المجال $]-1,+\infty[$.

✓ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} -1+(x+1)e+2\ln(x+1) = \lim\limits_{\substack{t\to0\\t>0}} -1+t.e+2\ln(t) = -\infty$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -1+(x+1)e+2\ln(x+1) = +\infty$

✓ جدول تغيرات الدالة g :

x	-1 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

(2

✓ لدينا g متصلة على $]-1,+\infty[$

و g تزايدية قطعا على $]-1,+\infty[$

و $0\in g\left(]-1,+\infty[\right) =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,+\infty[$

✓ لدينا g متصلة على $[-0,34;-0,33]$

و لدينا $g\left(-0,34\right)<0$ و $g\left(-0,33\right)>0$ إذن $g\left(-0,34\right)\times g\left(-0,33\right)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $-0,34<\alpha<-0,33$

3) لندرس إشارة $g\left(x\right)$ لكل x من المجال $\left]-1,+\infty\right[$

- ✓ إذا كان $-1<x\leq\alpha$:

لدينا g تزايدية إذن $g\left(x\right)\leq g\left(\alpha\right)$

و منه $g\left(x\right)\leq 0$

- ✓ إذا كان $x\geq\alpha$:

لدينا g تزايدية إذن $g\left(x\right)\geq g\left(\alpha\right)$

و منه $g\left(x\right)\geq 0$

II.

1) أ-

✓

$$\begin{pmatrix} t=x+1 \\ x\to-1^+ \\ t\to 0^+ \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x\to-1^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to-1^+}\frac{e}{x+1}+\frac{\ln\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{e}{t}+\frac{\ln t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\left(e+\frac{1}{t}.\ln t\right)=-\infty$$

لأن :
$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to0^+}\frac{e}{t}=+\infty \\ \lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t}=+\infty \\ \lim\limits_{t\to0^+}\ln\left(t\right)=-\infty \end{cases}$$

✓

$$\begin{pmatrix} t=x+1 \\ x\to+\infty \\ t\to+\infty \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{x+1}+\frac{\ln\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e}{t}+\frac{\ln t}{t^2}=0$$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t^2} = 0 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{e}{t} = 0 \end{cases}$

ب-

✓ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty \Leftarrow$ (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=-1$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Leftarrow$ (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$

2) أ- لدينا f قابلة للإشتقاق على المجال $]-1,+\infty[$

ليكن $x \in]-1,+\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right)'$$

$$= \frac{-e(x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{(\ln(x+1))'.(x+1)^2 - \ln(x+1).\left((x+1)^2\right)'}{\left((x+1)^2\right)^2}$$

$$= \frac{-e}{(x+1)^2} + \frac{\frac{(x+1)'}{x+1}.(x+1)^2 - \ln(x+1).2(x+1)'(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{-e}{(x+1)^2} + \frac{(x+1) - 2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{-e}{(x+1)^2} + \frac{1 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{-e(x+1) + 1 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{-\left(-1 + e(x+1) + 2\ln(x+1)\right)}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$$

إذن لكل x من المجال $]-1,+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$

ب- لدينا لكل x من المجال $]-1,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{(x+1)^3}$

بما أن $x>-1$ فإن $(x+1)^3>0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-g(x)$

- ✓ على المجال $]-1,\alpha]$ لدينا $g(x)\leq 0$ إذن $-g(x)\geq 0$ و منه $f'(x)\geq 0$
و بالتالي f تزايدية
- ✓ على المجال $[\alpha,+\infty[$ لدينا $g(x)\geq 0$ إذن $-g(x)\leq 0$ و منه $f'(x)\leq 0$
و بالتالي f تناقصية

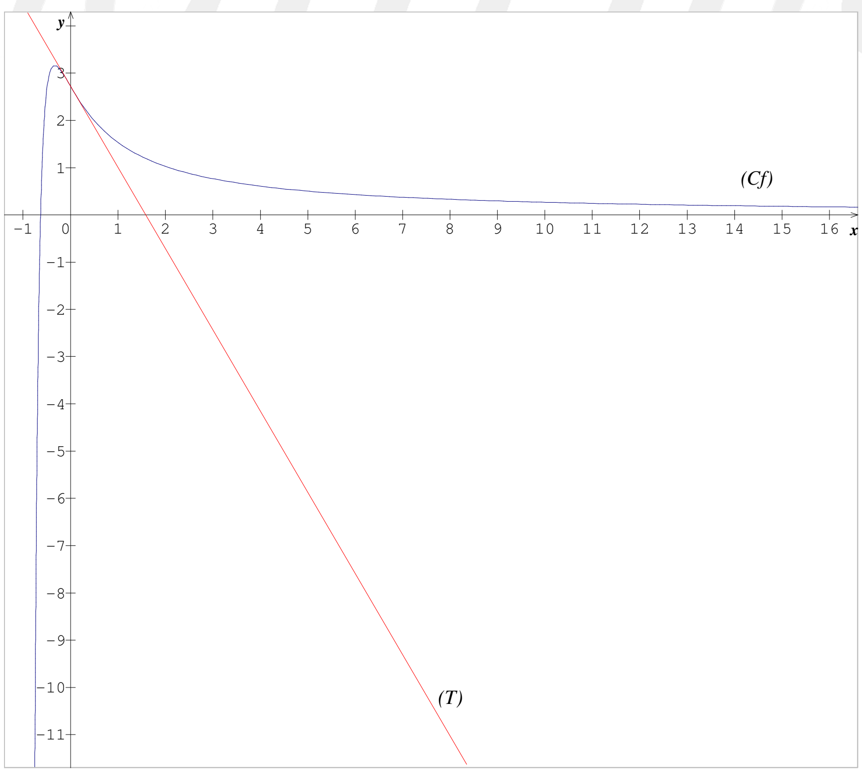
<u>جدول تغيرات f :</u>

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3) أ- معادلة المماس (T) في النقطة ذات الأفصول 0 :

$$y=f'(0).(x-0)+f(0)$$
$$y=(1-e)x+e$$

ب-



4) أ-

✓ لدينا الدالة $H : x \mapsto \frac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$ قابلة للإشتقاق على $]-1,+\infty[$

✓ ليكن $x \in]-1,+\infty[$:

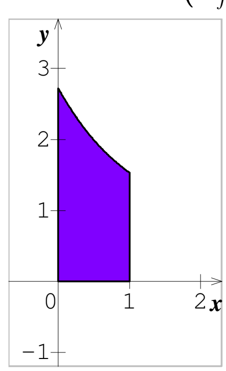
$$\begin{aligned}
H'(x) &= \left(\frac{-1}{x+1}\left(1+\ln(x+1)\right)\right)' \\
&= \left(\frac{-1}{x+1}\right)'.\left(1+\ln(x+1)\right)+\left(\frac{-1}{x+1}\right).\left(1+\ln(x+1)\right)' \\
&= -\frac{-(x+1)'}{(x+1)^2}.\left(1+\ln(x+1)\right)-\frac{1}{x+1}.\left(0+\frac{(x+1)'}{x+1}\right) \\
&= \frac{1}{(x+1)^2}\left(1+\ln(x+1)\right)-\frac{1}{x+1}.\left(\frac{1}{x+1}\right) \\
&= \frac{1}{(x+1)^2}\left(1+\ln(x+1)-1\right) \\
&= \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \\
&= h(x)
\end{aligned}$$

إذن لكل x من المجال $]-1,+\infty[$: $H'(x)=h(x)$

و بالتالي الدالة $H : x \mapsto \frac{-1}{x+1}\left[1+\ln(x+1)\right]$

هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1,+\infty[$

ب- مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي : $x=0$ و $x=1$



$$A = \int_0^1 |f(x)|dx.\|\vec{i}\|.\|\vec{j}\|$$
$$= \int_0^1 f(x)dx \times 1cm \times 1cm$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right)dx.cm^2$$
$$= \int_0^1 \left(e\frac{(x+1)'}{x+1} + h(x)\right)dx.cm^2$$
$$= \left[e\ln(x+1) + H(x)\right]_0^1.cm^2$$
$$= \left(e\ln(2) - \frac{1}{2}(1+\ln(2))\right) - (0+(-1))$$
$$= \left(e\ln(2) + \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}\right).cm^2$$

ج- القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0,1]$:

$$\mu = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = e\ln(2) + \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$$

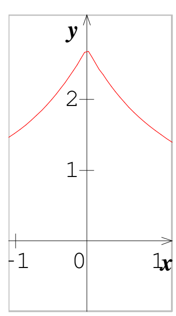
5) أ- لدينا :

✓ لكل x من D_k : $-x \in D_k$

✓ لكل x من D_k : $k(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = k(x)$

ذن k دالة زوجية

ب-



ج- مبيانيا عدد حلول المعادلة $k(x) = m$ هو عدد نقط تقاطع (C_k) و المستقيم ذي المعادلة $y = m$

✓ إذا كان $m \in \left]-\infty, \frac{e}{2} + \frac{\ln 2}{4}\right[$: المعادلة لا تقبل حلا

- ✓ إذا كان $m \in \left[\frac{e}{2}+\frac{\ln 2}{4}, e\right[$: المغلدلة تقبل حلين
- ✓ إذا كان $m = e$: المعادلة تقبل حلا وحيدا
- ✓ إذا كان $m \in \left]e, +\infty\right[$: المعادلة لا تقبل حلا

つづく