الثانية علوم تجريبية

تصحيح الامتحان الوطني العادي لـ 2014

التمرين الأول: (3 ن)

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، النقط $A\left(0,3,1\right)$ و $B\left(-1,3,0\right)$ و $C\left(0,5,0\right)$ و الفلكة $\left(S\right)$ التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$

0,75	1) أ- بين أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$ و استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية
0,5	ب- بين أن $2x-y-2z+5=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $\left(ABC\right)$
0,5	2) أ- بين أن مركز الفلكة $\left(S\right)$ هو النقطة $\Omega\left(2,0,0\right)$ و أن شعاعها هو 3
0,75	ب- بين أن المستوى $\left(ABC\right)$ مماس للفلكة $\left(S\right)$
0,5	ج- حدد مثلوث إحداثيات H نقطة تماس المستوى $\left(ABC\right)$ و الفلكة $\left(S\right)$

التمرين الثاني : (3 ن)

0,75	1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-z\sqrt{2}+2=0$
	2) نعتبر العدد العقدي $u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$
0,5	أ- بين أن معيار العدد u هو $\sqrt{2}$ و أن $\arg u\equiv\dfrac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$
0,75	ب- باستعمال كتابة العدد u على الشكل المثلثي ، بين أن u^6 عدد حقيقي
	3) نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$ ، النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي a و b بحيث $a=4-4i\sqrt{3}$ و $b=8$
	ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$
0,5	أ- عبر عن z' بدلالة z
0,5	ب- تحقق من أن B هي صورة A بالدوران R و استنتج أن المثلث OAB متساوي الأضلاع

التمرين الثالث : (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)$ المعرفة بما يلي : $u_0=13$ و $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+7$ لكل n من $\mathbb{N}$

0,75	1) بين بالترجع أن $u_n<14$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث : $v_n = 14 - u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم أكتب v_n بدلالة n	1
ب- استنتج أن $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n)	0,75
ج- حدد أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n > 13,99$	0,5

التمرين الرابع : (3 ن)

يحتوي كيس على تسع بيدقات لا يمكن التمييز بينها باللمس و تحمل الأعداد : 0 و 0 و 0 و 0 و 1 و 1 و 1 و 1 و 1	
1) نسحب عشوائيا و في آن واحد بيدقتين من الكيس ليكن A الحدث : " مجموع العددين اللذين تحملاهما البيدقتين المسحوبتين يساوي 1 " بين أن $p(A) = \frac{5}{9}$	1
2) نعتبر اللعبة التالية : يسحب سعيد عشوائيا و في آن واحد بيدقتين من الكيس و يعتبر فائزا إذا سحب بيدقتين تحمل كل واحدة منهما العدد 1	
أ- بين أن احتمال فوز سعيد هو $\frac{1}{6}$	1
ب- لعب سعيد اللعبة السابقة ثلاث مرات (يعيد سعيد البيدقتين المسحوبتين إلى الكيس في كل مرة) ما هو الإحتمال لكي يفوز سعيد مرتين بالضبط ؟	1

المسألة : (8 ن)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$	
1) بين أن $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ و استنتج أن الدالة g تزايدية على $]0,+\infty[$	0,5
2) تحقق أن $g(1) = 0$ ثم استنتج أن $g(x) \leq 0$ لكل x من $]0,1]$ و $g(x) \geq 0$ لكل x من $[1,+\infty[$	0,75
II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = (1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$ و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1cm$)	
1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ و أول هندسيا النتيجة	0,5
2) أ- أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	0,25
ب- بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x} = 0$ (يمكنك وضع $t = \sqrt{x}$) ثم بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	1
ج- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$	0,25
3) أ- بين أن $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن الدالة f تناقصية على $]0,1]$	1,5

و تزايدية على $\left[1,+\infty\right[$	
ب- ضع جدول تغيرات الدالة f على $\left]0,+\infty\right[$ ثم استنتج أن $f\left(x\right)\geq 2$ لكل x من $\left]0,+\infty\right[$	1
4) أنشئ $\left(C\right)$ في المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (نقبل أن للمنحنى $\left(C\right)$ نقطة انعطاف وحيدة تحديدها غير مطلوب)	0,75
5) نعتبر التكاملين I و J التاليين : $I=\int_1^e\left(1+\ln x\right)dx$ و $J=\int_1^e\left(1+\ln x\right)^2dx$	
أ- بين أن $H:x\mapsto x\ln x$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto 1+\ln x$ على $\left]0,+\infty\right[$ ثم استنتج أن $I=e$	0,5
ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $J=2e-1$	0,5
ج- أحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $\left(C\right)$ و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$	0,5

تصحيح التمرين الأول

1) أ-

✓ لدينا : $\overrightarrow{AB}(-1,0,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,2,-1)$

إذن :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{k}\\ &=2.\vec{i}-1.\vec{j}-2.\vec{k}\\ &=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}\end{aligned}$$

✓ بما أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فإن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتين
و منه فإن النقط A و B و C غير مستقيمية

ب- لدينا $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,-1,-2)$ منظمية للمستوى (ABC)
إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $(ABC): 2x-y-2z+d=0$
و لدينا $C(0,5,0)\in(ABC)$ إذن : $2(0)-(5)-2(0)+d=0$ أي : $d=5$
و بالتالي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) هي : $2x-y-2z+5=0$

2) أ-

$$\begin{aligned}M(x,y,z)\in(S) &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-5=0\\ &\Leftrightarrow x^2-4x+y^2+z^2=5\\ &\Leftrightarrow x^2-2(2)x+(2)^2+y^2+z^2=5+(2)^2\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2+z^2=9\\ &\Leftrightarrow (x-(2))^2+(y-(0))^2+(z-(0))^2=(3)^2\end{aligned}$$

إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(2,0,0)$ و أن شعاعها هو $R=3$.

ب-

✓ $$d(\Omega,(ABC))=\frac{|2(2)-(0)-2(0)+5|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=3$$

✓ بما أن $d(\Omega,(ABC))=R$ فإن (ABC) مماس للفلكة (S).

ج- H نقطة تماس (ABC) و (S) هي المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (ABC)
و بالتالي H هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) (المار من Ω و العمودي على المستوى (ABC))

مع المستوى (ABC)

تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) :

($\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,-1,-2)$ هي موجهة ل (Δ) لأن $(\Delta)\perp(ABC)$ و $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,-1,-2)$ منظمية للمستوى (ABC) و لدينا $\Omega\in(\Delta)$)

$$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

$$H(x_H,y_H,z_H)\in(\Delta)\cap(ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2+2t \\ y_H = -t \\ z_H = -2t \\ 2x_H - y_H - 2z_H + 5 = 0 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

بعد التعويض نجد : $t=-1$

إذن : $\begin{cases} x_H = 2+2(-1) = 0 \\ y_H = -(-1) = 1 \\ z_H = -2(-1) = 2 \end{cases}$

و منه $H(0,1,2)$ هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S)

تصحيح التمرين الثاني

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$

لدينا : $\Delta = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 4(1)(2) = -6$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z = \frac{-\left(-\sqrt{2}\right) - i\sqrt{6}}{2(1)} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-\left(-\sqrt{2}\right) + i\sqrt{6}}{2(1)}$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{أو} \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

إذن : $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$

2) أ-

$$|u|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{6}{4}}=\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2} \quad \checkmark$$

✓ نضع $\arg u\equiv\theta[2\pi]$

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow \quad \arg u\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

ب- الشكل المثلثي للعدد u هو : $u=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

باستعمال علاقة موافر : $u^6=\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^6=\left(\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\left(\frac{6\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{3}\right)\right)$

إذن : $u^6=8\left(\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)\right)=8(1+i\times0)=8$

و منه : $u^6\in\mathbb{R}$

3) أ-

$$z'-z_O=e^{\frac{i\pi}{3}}(z-z_O)$$

$$z'-0=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-0)$$

$$z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

ب-

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).a=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\left(4-4i\sqrt{3}\right)=2-2i\sqrt{3}+2i\sqrt{3}+6=8=b \quad \checkmark$$

إذن : B هي صورة A بالدوران R

✓ لدينا : $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=1.e^{\frac{i\pi}{3}}$

- لدينا : $\left|\frac{b}{a}\right|=1$ إذن $\left|\frac{b-0}{a-0}\right|=1$ إذن $\frac{OB}{OA}=1$ و منه $OB=OA$
- و لدينا : $\arg\left(\frac{b}{a}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ إذن $\arg\left(\frac{b-0}{a-0}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ و منه

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

و بالتالي : المثلث OAB متساوي الأضلاع

تصحيح التمرين الثالث

1)

✓ من أجل $n=0$:

لدينا : $u_0=13$

إذن : $u_0<14$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$:

- نفترض أن $u_n<14$
- و نبين أن $u_{n+1}<14$

لدينا حسب الإفتراض $u_n<14$

إذن $\frac{1}{2}u_n<7$

إذن $\frac{1}{2}u_n+7<14$

و منه $u_{n+1}<14$

✓ نستنتج أن أن $u_n<14$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) أ-

ليكن $n\in\mathbb{N}$:

لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 14-u_{n+1} \\ &= 14-\left(\frac{1}{2}u_n+7\right) \\ &= 7-\frac{1}{2}u_n \\ &= \frac{1}{2}(14-u_n) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

إذن : $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0=14-u_0=14-13=1$

لنكتب v_n بدلالة n :

لدينا : $v_n=v_0\times q^n$

إذن : $v_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

و منه : $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب-

- ✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$:
  لدينا $v_n=14-u_n$
  إذن $u_n=14-v_n$
  و منه $u_n=14-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$
- ✓ بما أن $-1<\frac{1}{2}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$
  إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}14-\left(\frac{1}{2}\right)^n=14$

ج- لدينا :

$$\begin{aligned}
u_n>13,99 &\Leftrightarrow 14-\left(\frac{1}{2}\right)^n>13,99\\
&\Leftrightarrow 14-13,99>\left(\frac{1}{2}\right)^n\\
&\Leftrightarrow 0,01>\left(\frac{1}{2}\right)^n\\
&\Leftrightarrow \ln(0,01)>n.\ln\left(\frac{1}{2}\right)\\
&\Leftrightarrow n>\frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\\
&\Leftrightarrow n>6,65
\end{aligned}$$

إذن : $n=7$ أصغر قيمة للعدد الصحيح الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n > 13,99$

تصحيح التمرين الرابع

1) التجربة " سحب في آن واحد بيدقتين من الكيس "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا : $card\,\Omega = C_9^2 = 36$

A " مجموع العددين اللذين تحملاهما البيدقتين المسحوبتين يساوي 1 "

0 و 1

$$cardA = C_5^1 \times C_4^1 = 20$$

$$p(A) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

2) أ) B " فوز سعيد " 1 1

$$p(B) = \frac{C_4^2}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ب) لدينا تكرار لاختبار:

$n=3$: عدد المرات التي لعب فيها سعيد اللعبة السابقة

$k=2$: فوز سعيد باللعبة مرتين بالضبط

$p = p(B) = \frac{1}{6}$: احتمال فوز سعيد

إذن : احتمال فوز سعيد مرتين بالضبط هو :

$$C_3^2 \times p^2 \times (1-p)^{3-2} = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{72}$$

تصحيح المسألة

I.

(1

✓ ليكن $x \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(1-\frac{1}{x^2}+\ln x\right)' \\ &= 0-\frac{-(x^2)'}{(x^2)^2}+\frac{1}{x} \\ &= \frac{2x}{x^4}+\frac{1}{x} \\ &= \frac{2}{x^3}+\frac{1}{x} \end{aligned}$$

إذن : $g'(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$

✓ لدينا $x>0$ إذن $\frac{2}{x^3}>0$ و $\frac{1}{x}>0$ و منه $g'(x)>0$ لكل x من $]0,+\infty[$

و بالتالي g تزايدية (قطعا) على $]0,+\infty[$

(2

✓ $g(1)=1-\frac{1}{1^2}+\ln 1=1-1+0=0$

✓

- على المجال $]0,1]$:

لدينا $0<x\leq 1$

إذن $g(x)\leq g(1)$ (لأن g تزايدية)

و منه $g(x)\leq 0$

- على المجال $[1,+\infty[$:

لدينا $x\geq 1$

إذن $g(x)\geq g(1)$ (لأن g تزايدية)

و منه $g(x)\geq 0$

II.

(1 لدينا : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+\ln x)^2+\frac{1}{x^2}=+\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} (1+\ln x)^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \end{cases}$

<u>التأويل الهندسي :</u> (C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$

2) أ-

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (1+\ln x)^2 + \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (1+\ln x)^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$

ب-

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{(1+\ln x)^2}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+\ln\left(\sqrt{x}^2\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+2\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 \\
&= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 \\
&= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{t} + 2\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 0
\end{aligned}$$

$\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{t} = 0 \\ \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0 \end{cases}$ و $\begin{pmatrix} t = \sqrt{x} \\ x \to +\infty \\ t \to +\infty \end{pmatrix}$

ج- لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(1+\ln x)^2}{x} + \dfrac{1}{x^3} = 0$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(1+\ln x)^2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0 \end{cases}$

<u>التأويل الهندسي :</u>

لدينا : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$ إذن : (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

3) أ-

- ليكن $x \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2}\right)' \\ &= 2.(1+\ln x)'.(1+\ln x) + \frac{-(x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= 2\times\frac{1}{x}\times(1+\ln x) - \frac{2x}{x^4} \\ &= \frac{2(1+\ln x)}{x} - \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{2}{x}\left(1+\ln x - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{2g(x)}{x} \end{aligned}$$

إذن : $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$

- لدينا : $\dfrac{2}{x} > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

و حسب الجزء : $2.I$) لدينا :

- على المجال $]0,1]$:

$g(x) \le 0$ إذن $f'(x) \le 0$ و منه f تناقصية

- على المجال $[1,+\infty[$:

$g(x) \ge 0$ إذن $f'(x) \ge 0$ و منه f تزايدية

ب- جدول تغيرات f :

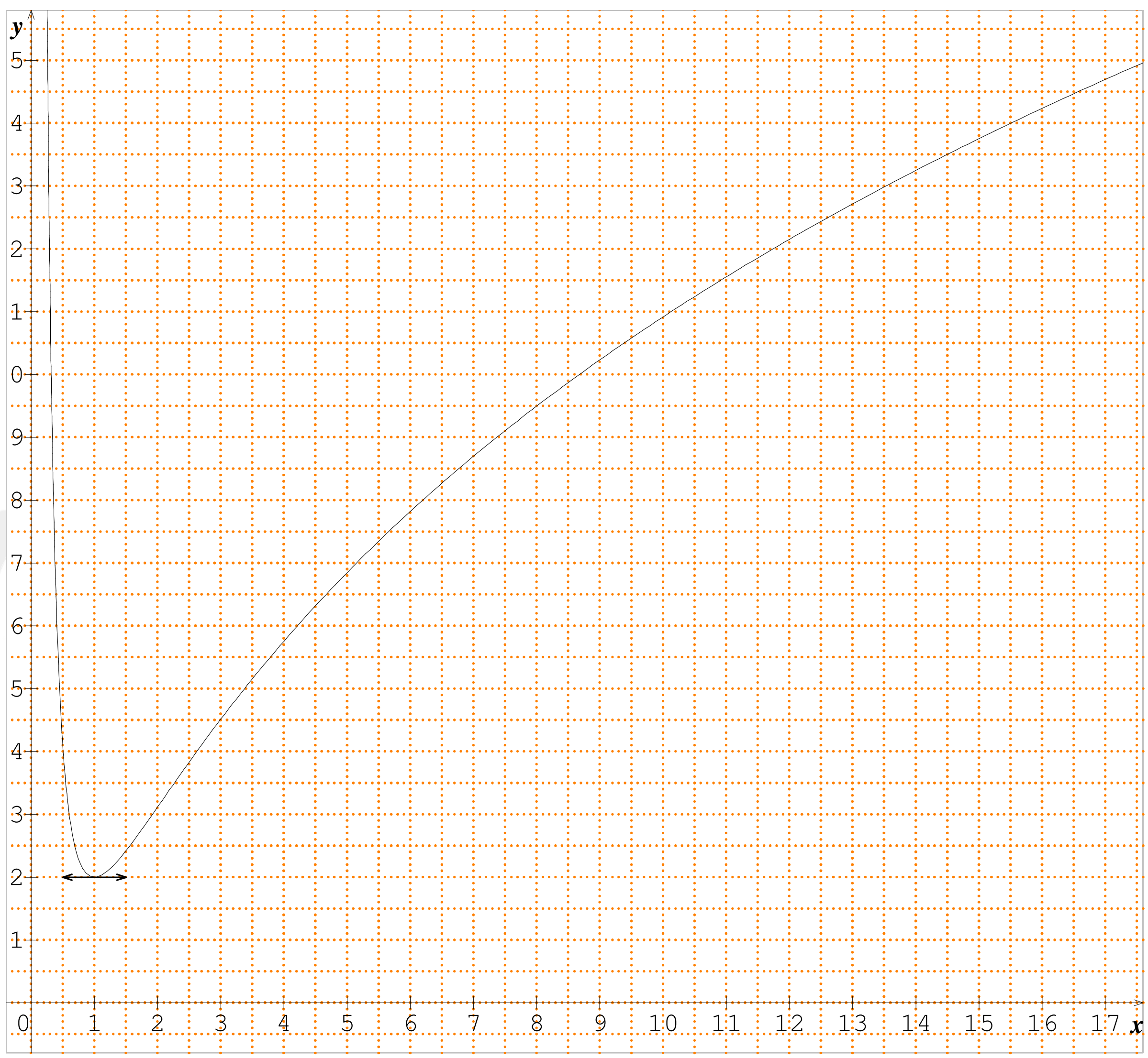
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

لدينا $f(1)$ هي القيمة الدنوية للدالة f على $]0,+\infty[$

إذن $(\forall x \in]0,+\infty[)\quad f(x) \geq f(1)$

و منه $(\forall x \in]0,+\infty[)\quad f(x) \geq 2$

(4



(5 أ-

✓

- الدالة $H : x \mapsto x\ln x$ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$
- ليكن $x \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} H'(x) &= (x \ln x)' \\ &= (x)'.\ln x + x.\ln'(x) \\ &= \ln x + x.\frac{1}{x} \\ &= \ln(x)+1 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

إذن : $H'(x)=h(x) \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

و منه H دالة أصلية للدالة h على المجال $]0,+\infty[$

✓

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e (1+\ln x)dx \\ &= \int_1^e h(x)dx \\ &= \left[H(x)\right]_1^e \\ &= H(e)-H(1) \\ &= e.\ln e - 1.\ln 1 \\ &= e \end{aligned}$$

ب- لنحسب $J=\int_1^e (1+\ln x)^2 dx$:

لدينا : $\begin{cases} u'(x)=\dfrac{2(1+\ln x)}{x} \\ v(x)=x \end{cases} \updownarrow \quad \nwarrow\!\!\searrow \quad \begin{cases} u(x)=(1+\ln x)^2 \\ v'(x)=1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} J &= \left[x(1+\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e 2(1+\ln x)dx \\ &= \left(e.(1+\ln e)^2 - 1.(1+\ln 1)^2\right) - 2\int_1^e (1+\ln x)dx \\ &= 4e-1-2e \\ &= 2e-1 \end{aligned}$$

ج-

$$
\begin{aligned}
A &= \int_1^e |f(x)|dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\
&= \int_1^e f(x)dx \times 1cm \times 1cm \\
&= \int_1^e \left((1+\ln x)^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx . cm^2 \\
&= \left(\int_1^e (1+\ln x)^2 + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx \right) . cm^2 \\
&= \left(2e - 1 + \left[\frac{-1}{x} \right]_1^e \right) . cm^2 \\
&= \left(2e - 1 - \frac{1}{e} + 1 \right) . cm^2 \\
&= \left(2e - \frac{1}{e} \right) . cm^2
\end{aligned}
$$

つづく