الثانية علوم تجريبية

تصحيح الامتحان الوطني الاستدراكي لـ 2014

التمرين الأول (3 ن)

نعتبر ، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، النقطة $A\left(0,0,1\right)$ و المستوى $\left(P\right)$ الذي معادلته $2x+y-2z-7=0$ و الفلكة $\left(S\right)$ التي مركزها $\Omega\left(0,3,-2\right)$ و شعاعها هو 3

1) أ- بين أن : $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases} \quad \left(t\in\mathbb{R}\right)$ تمثيل بارامتري للمستقيم $\left(\Delta\right)$ المار من النقطة A و العمودي على $\left(P\right)$	0,5
ب- تحقق من أن $H\left(2,1,-1\right)$ هي نقطة تقاطع المستوى $\left(P\right)$ و المستقيم $\left(\Delta\right)$	0,75
2) أ- بين أن $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=3\left(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\right)$ حيث $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$	0,5
ب- بين أن مسافة النقطة Ω عن المستقيم $\left(\Delta\right)$ تساوي 3	0,5
ج- استنتج أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ مماس للفلكة $\left(S\right)$ و تحقق من أن H هي نقطة تماس المستقيم $\left(\Delta\right)$ والفلكة $\left(S\right)$	0,75

التمرين الثاني (3 ن)

نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $u_1=5$ و $u_{n+1}=\dfrac{5u_n-4}{1+u_n}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

1) بين بالترجع أن $u_n>2$ لكل n من $\mathbb{N}^*$	0,75
2) نعتبر المتتالية العددية $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $v_n=\dfrac{3}{u_n-2}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$	
أ- بين أن $v_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{u_n-2}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ ثم بين أن المتتالية $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ حسابية أساسها 1	1
ب- أكتب v_n بدلالة n و استنتج أن $u_n=2+\dfrac{3}{n}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$	0,75
ج- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$	0,5

التمرين الثالث (3 ن)

لتحديد سؤالي اختبار شفوي خاص بمباراة توظيف، يسحب مترشح ،عشوائيا ، بالتتابع و بدون إحلال بطاقتين من صندوق يحتوي على 10 بطاقات : ثمان بطاقات تتعلق بمادة الرياضيات و بطاقتان تتعلقان بمادة اللغة

الفرنسية (نعتبر أنه لا يمكن التمييز بين البطاقات باللمس) .	
1) نعتبر الحدث A : " سحب بطاقتين تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية " و الحدث B : " سحب بطاقتين تتعلقان بمادتين مختلفتين " بين أن $p(A)=\frac{1}{45}$ و $p(B)=\frac{16}{45}$	1,5
2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد البطاقات المسحوبة المتعلقة بمادة اللغة الفرنسية	
أ- تحقق من أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2	0,25
ب- بين أن $p(X=0)=\frac{28}{45}$ ثم اعط قانون احتمال X	1,25

التمرين الرابع (3 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+5=0$	0,75
2) نعتبر ، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ ، النقط A و B و C و D و Ω التي ألحاقها على التوالي هي : $a=2+i$ و $b=2-i$ و $c=i$ و $d=-i$ و $\omega=1$	
أ- بين أن $\frac{a-\omega}{b-\omega}=i$	0,25
ب- استنتج أن المثلث ΩAB قائم الزاوية و متساوي الساقين في Ω	0,5
3) ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$	
أ- بين أن : $z'=iz+1-i$	0,5
ب- تحقق من أن $R(A)=C$ و $R(D)=B$	0,5
ج- بين أن النقط A و B و C و D تنتمي إلى نفس الدائرة محددا مركزها	0,5

التمرين الخامس (8 ن)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=(xe^x-1)e^x$ و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $2cm$)	
1) بين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ و أول النتيجة هندسيا	0,75
2) أ- بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$	0,75
ب- استنتج أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ يتم تحديد اتجاهه	0,5
3) أ- بين أن $f'(x)=e^x(e^x-1+2xe^x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم تحقق من أن $f'(0)=0$	1
ب- بين أن $e^x-1\geq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$ و أن $e^x-1\leq 0$ لكل x من $]-\infty,0]$	0,5
ج- بين أن الدالة f تزايدية على $[0,+\infty[$ و تناقصية على $]-\infty,0]$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$	1,25
4) أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0,+\infty[$ و أن $\frac{1}{2}<\alpha<1$ (نقبل أن $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}<1$)	0,75

ب- أنشئ (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة غير مطلوب تحديدها)	$0,75$
5) باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx = \frac{1}{4}$	$0,75$
6) أحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = \frac{1}{2}$	1

تصحيح التمرين الأول

1) أ- لدينا $\vec{n}(2,1,-2)$ منظمية للمستوى (P) و $(\Delta)\perp(P)$

إذن $\vec{n}(2,1,-2)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

و لدينا $A(0,0,1)\in(\Delta)$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=(0)+t(2) \\ y=(0)+t(1) \\ z=(1)+t(-2) \end{cases}$

أي : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases}$

ب- $H(x_H,y_H,z_H)\in(\Delta)\cap(P) \Leftrightarrow \begin{cases} x_H=2t \\ y_H=t \\ z_H=1-2t \\ 2x_H+y_H-2z_H-7=0 \end{cases}$

بعد التعويض نجد : $t=1$ إذن $\begin{cases} x_H=2(1)=2 \\ y_H=(1)=1 \\ z_H=1-2(1)=-1 \end{cases}$

إذن : $H(2,1,-1)$ هي نقطة تقاطع المستوى (P) و المستقيم (Δ)

2) أ- لدينا : $\overrightarrow{\Omega A}(0,-3,3)$ و $\vec{u}(2,1,-2)$

إذن : $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$

إذن : $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=3\vec{i}-(-6)\vec{j}+(6)\vec{k}$

إذن : $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=3\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}$

و منه : $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}=3(\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k})$

ب- $d(\Omega,(\Delta))=\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}=\dfrac{\sqrt{3^2+6^2+6^2}}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}}=\dfrac{9}{3}=3$

ج-

- ✓ بما أن $d\left(\Omega,(\Delta)\right)=3=R$ فإن (Δ) مماس للفلكة (S)
- ✓ لنحدد نقطة تماس (Δ) و (S)

$$M(x,y,z)\in(\Delta)\cap(S) \iff \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=1-2t \\ x^2+(y-3)^2+(z+2)^2=3^2 \end{cases}$$

بعد التعويض نجد $9t^2-18t+9=0$ إذن $t^2-2t+1=0$ إذن $(t-1)^2=0$

أي $t=1$ ومنه : $\begin{cases} x=2(1)=2 \\ y=(1)=1 \\ z=1-2(1)=-1 \end{cases}$

و بالتالي H هي نقطة تماس المستقيم (Δ) والفلكة (S)

تصحيح التمرين الثاني

(1

- ✓ من أجل $n=1$:
  لدينا $u_1=5$
  إذن $u_1>2$
- ✓ ليكن $n\in\mathbb{N}^*$
  - نفترض أن $u_n>2$
  - و نبين أن $u_{n+1}>2$

لدينا : $u_{n+1}-2=\dfrac{5u_n-4}{1+u_n}-2=\dfrac{5u_n-4-2-2u_n}{1+u_n}=\dfrac{3u_n-6}{1+u_n}=\dfrac{3(u_n-2)}{1+u_n}$

لدينا حسب الإفتراض $u_n>2$

إذن : $3(u_n-2)>0$ و $1+u_n>3>0$

إذن : $\dfrac{3(u_n-2)}{1+u_n}>0$

إذن : $u_{n+1}-2>0$

إذن : $u_{n+1}>2$

- نستنتج أن : $u_n>2$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}^*$

2) أ-

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_{n+1} = \frac{3}{u_{n+1}-2} = \frac{3}{\frac{3(u_n-2)}{1+u_n}} = \frac{1+u_n}{u_n-2}$$

إذن : $v_{n+1} = \frac{1+u_n}{u_n-2}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

✓ لدينا : $v_{n+1} - v_n = \frac{1+u_n}{u_n-2} - \frac{3}{u_n-2} = \frac{u_n-2}{u_n-2} = 1$

إذن : $v_{n+1} - v_n = 1$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

و منه : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ حسابية أساسها $r = 1$ و حدها الأول : $v_1 = \frac{3}{u_1-2} = \frac{3}{5-2} = \frac{3}{3} = 1$

ب-

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n = v_1 + (n-1)r$$
$$v_n = 1 + (n-1)\times 1$$
$$v_n = 1 + n - 1$$

إذن : $v_n = n$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

✓ لدينا : $v_n = \frac{3}{u_n-2}$ إذن : $u_n - 2 = \frac{3}{v_n}$

إذن : $u_n = 2 + \frac{3}{v_n}$

و منه : $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

ج- $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2 + \frac{3}{n} = 2$ لأن : $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$

تصحيح التمرين الثالث

التجربة " يسحب المترشح بالتتابع و بدون إحلال بطاقتين من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات التجربة

لدينا : $card\,\Omega = A_{10}^{2} = 90$

1)

✓ A : " سحب بطاقتين تتعلقان بمادة اللغة الفرنسية "

FوF

لدينا : $cardA = A_2^2 = 2$

إذن : $p(A) = \dfrac{cardA}{card\,\Omega} = \dfrac{2}{90} = \dfrac{1}{45}$

✓ B **:** " سحب بطاقتين تتعلقان بمادتين مختلفتين "

$\begin{cases} F\text{و}M \\ M\text{و}F \end{cases}$ أو

لدينا : $cardB = 2\times\left(A_2^1\times A_8^1\right) = 2\times2\times8 = 32$

إذن : $p(B) = \dfrac{cardB}{card\,\Omega} = \dfrac{32}{90} = \dfrac{16}{45}$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد البطاقات المسحوبة المتعلقة بمادة اللغة الفرنسية

أ- Mو$M \rightarrow X = 0$

$\begin{cases} F\text{و}M \\ M\text{و}F \end{cases}$ أو $\rightarrow X = 1$

Fو$F \rightarrow X = 2$

القيم التي يأخذها X هي : 0و1 و2.

ب-

✓ $p(X = 0) = \dfrac{A_8^2}{90} = \dfrac{56}{90} = \dfrac{28}{45}$

✓ لنحدد قانون احتمال X :

لدينا $p(X = 0) = \dfrac{28}{45}$

و $p(X = 1) = p(B) = \dfrac{16}{45}$

و $p(X = 2) = p(A) = \dfrac{1}{45}$

x_i	0	1	2
$p(X=x_i)$	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

تصحيح التمرين الرابع

1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 4z+5=0$

لدينا : $\Delta=(-4)^2-4(1)(5)=16-20=-4$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين

$z=\frac{-(-4)-i\sqrt{4}}{2(1)}$ أو $z=\frac{-(-4)+i\sqrt{4}}{2(1)}$

$z=2-i$ أو $z=2+i$

و بالتالي : $S=\{2-i,2+i\}$

2) أ- $\frac{a-\omega}{b-\omega}=\frac{2+i-1}{2-i-1}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{i(1-i)}{1-i}=i$

ب- لدينا : $\frac{a-\omega}{b-\omega}=i=1.e^{\frac{i\pi}{2}}$

✓ لدينا : $\left|\frac{a-\omega}{b-\omega}\right|=1$ إذن : $\frac{\Omega A}{\Omega B}=1$ و منه : $\Omega A=\Omega B$

✓ و لدينا : $\arg\left(\frac{a-\omega}{b-\omega}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن : $\left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega A}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و منه المثلث ΩAB قائم الزاوية و متساوي الساقين في Ω

3) أ-

$$z'-\omega=e^{\frac{i\pi}{2}}.(z-\omega)$$
$$z'-1=i.(z-1)$$
$$z'-1=iz-i$$
$$z'=iz+1-i$$

ب-

✓ لدينا : $ia+1-i=i(2+i)+1-i=2i-1+1-i=i=c$

إذن : $R(A)=C$

✓ لدينا : $id+1-i=i(-i)+1-i=1+1-i=2-i=b$

إذن : $R(D)=B$

ج- بما أن $R(A)=C$ و $R(D)=B$ فإن $\Omega A=\Omega C$ و $\Omega D=\Omega B$

و حسب نتيجة السؤال 2) أ- لدينا : $\Omega A=\Omega B$

إذن : $\Omega A=\Omega B=\Omega C=\Omega D$

ومنه : النقط A و Bو C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها Ω.

تصحيح التمرين الخامس

1)

✓ $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x-1\right)e^x=0$$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0\end{cases}$

✓ <u>التأويل الهندسي :</u>

(C) يقبل مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $-\infty$

2) أ-

✓ $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^x-1\right)e^x=+\infty$$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^x=+\infty\end{cases}$

✓ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(xe^x-1\right)e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^x-1\right)\times\frac{e^x}{x}=+\infty$$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^x-1=+\infty\end{cases}$

ب- لدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty\end{cases}$ إذن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3) أ-

✓ ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(xe^x - 1\right)e^x\right)' \\ &= \left(xe^x - 1\right)'e^x + \left(xe^x - 1\right)\left(e^x\right)' \\ &= \left((x)'e^x + xe^x\right)e^x + \left(xe^x - 1\right)e^x \\ &= \left(e^x + xe^x\right)e^x + \left(xe^x - 1\right)e^x \\ &= e^x\left(e^x + xe^x + xe^x - 1\right) \\ &= e^x\left(e^x - 1 + 2xe^x\right) \end{aligned}$$

إذن : $f'(x) = e^x\left(e^x - 1 + 2xe^x\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ $f'(0) = e^0\left(e^0 - 1 + 20.e^0\right) = 1.(1 - 1 + 0) = 0$

ب-

✓ ليكن $x \in [0,+\infty[$:

لدينا : $x \geq 0$ إذن : $e^x \geq e^0$ إذن : $e^x \geq 1$

و منه : $e^x - 1 \geq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$

✓ ليكن $x \in]-\infty,0]$:

لدينا : $x \leq 0$ إذن : $e^x \leq e^0$ إذن : $e^x \leq 1$

و منه : $e^x - 1 \leq 0$ لكل x من $]-\infty,0]$

ج-

✓ ليكن $x \in [0,+\infty[$:

لدينا $e^x > 0$ و $e^x - 1 \geq 0$ و $2xe^x \geq 0$ إذن : $f'(x) \geq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$

و منه الدالة f تزايدية على $[0,+\infty[$

✓ ليكن $x \in]-\infty,0]$:

لدينا $e^x > 0$ و $e^x - 1 \leq 0$ و $2xe^x \leq 0$ إذن : $f'(x) \geq 0$ لكل x من $]-\infty,0]$

و منه الدالة f تناقصية على $]-\infty,0]$

✓ جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0 \searrow$	-1	$\nearrow +\infty$

4) أ-

✓ لدينا :

- f متصلة على $[0,+\infty[$
- لدينا : $f\left([0,+\infty[\right)=[-1,+\infty[$ إذن : $0\in f\left([0,+\infty[\right)$
- f تزايدية قطعا $[0,+\infty[$

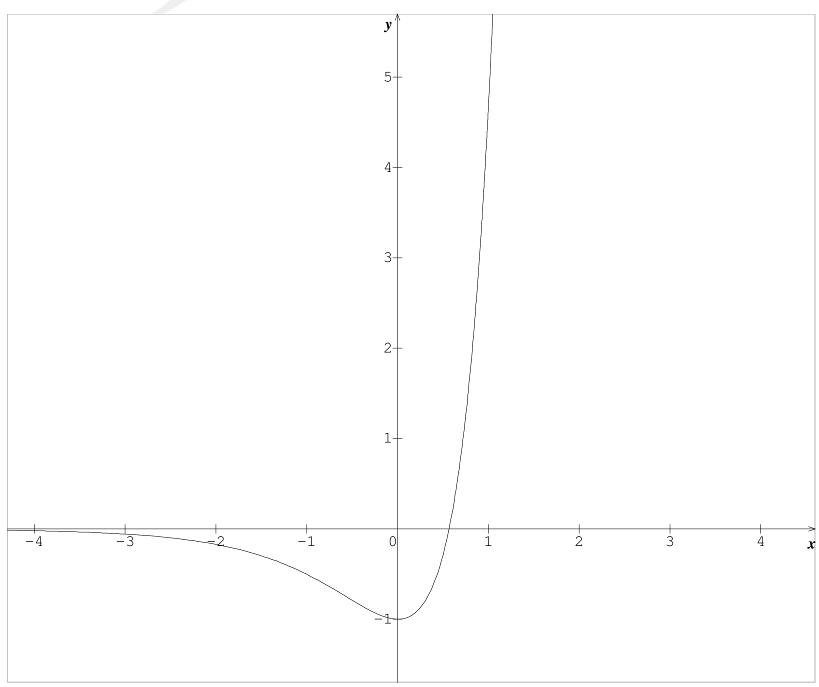
إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $[0,+\infty[$

✓ لدينا :

- f متصلة على المجال $\left[\frac{1}{2},1\right]$
- $f(1)=(e-1).e>0$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}-1\right).e^{\frac{1}{2}}<0$ إذن : $f\left(\frac{1}{2}\right).f(1)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية $\frac{1}{2}<\alpha<1$.

ب-



5) باستعمال مكاملة بالأجزاء:

$$\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^{2x} \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

لدينا :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx=\left[\frac{x}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx=\left(\frac{1}{4}e-0\right)-\left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx=\frac{1}{4}e-\left(\frac{1}{4}e-\frac{1}{4}\right)$$

إذن :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx=\frac{1}{4}$$

6) لدينا : $A=\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|dx\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

على المجال $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ لدينا : $f(x)\leq 0$

إذن :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{1}{2}} -f(x)dx\times 2cm\times 2cm \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}}(1-xe^{x})e^{x}dx\times 4cm^2 \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}}(e^{x}-xe^{2x})dx\times 4cm^2 \\ &= \left(\int_0^{\frac{1}{2}}e^{x}dx-\int_0^{\frac{1}{2}}xe^{2x}dx\right)\times 4cm^2 \\ &= \left(\left[e^{x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\right)\times 4cm^2 \\ &= \left(e^{\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{4}\right)\times 4cm^2 \\ &= \left(\sqrt{e}-\frac{5}{4}\right)\times 4cm^2 \\ &= \left(4\sqrt{e}-5\right).cm^2 \end{aligned}$$