الثانية علوم إقتصادية

تصحيح الامتحان الوطني لـ 2015 – د. استدراكية

التمرين الأول (3 ن) :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=4$ و $u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+3$ لكل n من $\mathbb{N}$	
1) بين بالترجع أن $u_n<5$ لكل n من $\mathbb{N}$	$0,5$
2) تحقق من أن $u_{n+1}-u_n=\frac{3}{5}(5-u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية .	$0,75$
3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .	$0,25$
4) لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث $v_n=5-u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ثم أكتب v_n بدلالة n	$0,75$
ب- استنتج أن $u_n=5-\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$ و أحسب نهاية المتتالية (u_n)	$0,75$

التمرين الثاني (3 ن) :

نعتبر، في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، المستوى (P) الذي معادلته $2x-z-2=0$ و الفلكة (S) التي معادلتها $x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0$	
1) بين أن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(-1,0,1)$ و أن شعاعها هو 3	1
2) أ- أحسب مسافة النقطة Ω عن المستوى (P)	$0,5$
ب- استنتج أن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ)	$0,5$
3) بين أن شعاع الدائرة (Γ) هو 2 و حدد مثلوث إحداثيات النقطة H مركز الدائرة (Γ)	1

التمرين الثالث (3 ن) :

1) أ- حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+32=0$	$0,75$
ب- نعتبر العدد العقدي a بحيث $a=4+4i$ أكتب العدد العقدي a على الشكل المثلثي ثم استنتج أن a^{12} عدد حقيقي سالب .	$0,75$
2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و b و c بحيث $a=4+4i$ و $b=2+3i$ و $c=3+4i$	

ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$	
أ- بين أن $z' = iz + 7 + i$	0,5
ب- تحقق من أن d لحق النقطة D صورة النقطة A بالدوران R هو $3+5i$	0,5
ج- بين أن مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث $\lvert z-4-4i \rvert = \lvert z-3-5i \rvert$ هي المستقيم (BC)	0,5

التمرين الرابع (3 ن) :

يحتوي صندوق على 5 بيدقات : بيدقتان بيضاوان و بيدقتان خضراوان و بيدقة حمراء واحدة (لا يمكن التمييز بين البيدقات باللمس). نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال ثلاث بيدقات من الصندوق .	
1) ليكن A الحدث : " البيدقات الثلاث المسحوبة من نفس اللون " بين أن $p(A) = \frac{17}{125}$	1
2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد البيدقات البيضاء المسحوبة . حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X	2

التمرين الخامس (8 ن) :

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 - x + x\ln x$	
1) أ- بين أن $g'(x) = \ln x$ لكل x من $]0,+\infty[$	0,5
ب- بين أن الدالة g تناقصية على $]0,1]$ و تزايدية على $[1,+\infty[$	0,5
2) أحسب $g(1)$ و استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$	0,75
II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}$	
و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $1cm$)	
1) بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$ و أول هندسيا النتيجة (لحساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ لاحظ أن $f(x) = \frac{3x^2 - 1 - 2x\ln x}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$)	0,75
2) بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ و استنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$	0,75
3) أ- بين أن $f'(x) = \frac{2g(x)}{x^3}$ لكل x من $]0,+\infty[$	0,75
ب- أول هندسيا النتيجة $f'(1) = 0$	0,25
ج- بين أن الدالة f تزايدية على $]0,+\infty[$	0,5
4) أنشئ ، في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، المنحنى (C) (نقبل أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف أفصول إحداهما 1 و أفصول الأخرى محصور بين 2 و 2,5 و نأخذ $f(0,3) = 0$)	0,75

5) أ- بين أن $\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx = 1$	0,5
ب- أحسب ، ب cm^2 ، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$	0,75
6) لتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $h(x)=3-\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(x^2)}{\lvert x\rvert}$	
أ- بين أن الدالة h زوجية و أن $h(x)=f(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$	0,75
ب- أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، المنحنى (C') الممثل للدالة h	0,5

تصحيح التمرين الأول

1) لنبين بالترجع أن $u_n < 5$ لكل n من $\mathbb{N}$

- ✓ من أجل $n=0$:
  لدينا $u_0 = 4$
  إذن : $u_0 < 5$
- ✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$
  - نفترض أن : $u_n < 5$
  - و نبين أن : $u_{n+1} < 5$

  حسب الإفتراض لدينا : $u_n < 5$

  إذن : $\frac{2}{5}u_n < 2$

  إذن : $\frac{2}{5}u_n + 3 < 5$

  ومنه : $u_{n+1} < 5$
- ✓ نستنتج أن $u_n < 5$ لكل n من $\mathbb{N}$

2)

- ✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$
  لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{5}u_n + 3 - u_n \\ &= \left(\frac{2}{5} - 1\right)u_n + 3 \\ &= \frac{-3}{5}u_n + 3 \\ &= \frac{3}{5}(5 - u_n) \end{aligned}$$

إذن : $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$

- ✓ لدينا : $u_n < 5$ إذن : $0 < 5 - u_n$ و نعلم أن $0 < \frac{3}{5}$

إذن : $0 < \frac{3}{5}(5 - u_n)$

إذن $0 < u_{n+1} - u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه المتتالية (u_n) تزايدية

3) بما أن (u_n) تزايدية و مكبورة (بالعدد 5) فإن (u_n) متقاربة

4) لتكن (v_n) المتتالية العددية بحيث $v_n = 5 - u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ-

✓ لنبين أن (v_n) هندسية :

ليكن $n \in \mathbb{N}$

لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 5 - u_{n+1} \\ &= 5 - \left(\frac{2}{5}u_n + 3\right) \\ &= \frac{-2}{5}u_n + 2 \\ &= \frac{2}{5}(5 - u_n) \\ &= \frac{2}{5} \times v_n \end{aligned}$$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{2}{5} \times v_n$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0 = 5 - u_0 = 5 - 4 = 1$

✓ لدينا : $v_n = v_0 \times q^n$ إذن $v_n = 1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

و منه لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$

ب-

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

لدينا : $v_n = 5 - u_n$

إذن : $u_n = 5 - v_n$

و منه : لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$

✓ بما أن : $-1 < \frac{2}{5} < 1$

فإن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ و منه : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 5$

تصحيح التمرين الثاني

1) لدينا :

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in(S) &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2x-2z-7=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+2x+y^2+z^2-2z=7 \\ &\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+z^2-2z+1=7+1+1 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2+(z-1)^2=9 \\ &\Leftrightarrow (x-(-1))^2+(y-(0))^2+(z-(1))^2=(3)^2 \end{aligned}$$

إذن مركز الفلكة (S) هو النقطة $\Omega(-1,0,1)$ و شعاعها $R=3$

2) أ- $d(\Omega,(P))=\dfrac{|2(-1)-(1)-2|}{\sqrt{(2)^2+(0)^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt5}=\sqrt5$

ب- بما أن $d(\Omega,(P))<R$ فإن (P) يقطع (S) وفق دائرة (Γ)

3) شعاع الدائرة (Γ) : $r=\sqrt{R^2-(d(\Omega,(P)))^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt5)^2}=\sqrt{9-5}=\sqrt4=2$

$H(x_H,y_H,z_H)$ مركز الدائرة (Γ) هو المسقط العمودي للنقطة $\Omega(-1,0,1)$ غلى المستوى (P)

و بالتالي $H(x_H,y_H,z_H)$ هي نقطة تقاطع المستوى (P) و المستقيم (Δ) العمودي على (P) والمار من $\Omega(-1,0,1)$.

لنحدد أولا تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) :

لدينا $\vec n(2,0,-1)$ منظمية للمستوى (P) و $(\Delta)\perp(P)$ إذن $\vec n(2,0,-1)$ هي متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

و لدينا : $\Omega(-1,0,1)\in(\Delta)$

إذن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) هو : $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$

$$H\left(x_H, y_H, z_H\right) \in (\Delta) \cap (P) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1+2t \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-t \\ 2x_H - z_H - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -1+2t \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-t \\ t = 1 \end{cases}$$

و منه $H\left(1,0,0\right)$ هي مركز الدائرة (Γ)

تصحيح التمرين الثالث

1) أ- لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 8z + 32 = 0$

لدينا : $\Delta = (-8)^2 - 4(1)(32) = 64 - 128 = -64$

بما أن $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z = \frac{-(-8) - i\sqrt{64}}{2(1)} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-(-8) + i\sqrt{64}}{2(1)}$$

$$z = 4 - 4i \quad \text{أو} \quad z = 4 + 4i$$

و منه : $S = \left\{4 - 4i, 4 + 4i\right\}$

ب-

- ✓ لنكتب العدد العقدي a على شكله المثلثي :

لدينا : $|a| = |4 + 4i| = 4\sqrt{2}$

إذن : $a = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

- ✓ باستعمال علاقة موافر لدينا :

$$a^{12} = \left(4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{12} = \left(4\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos\left(\frac{12\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{12\pi}{4}\right)\right)$$

إذن : $a^{12} = \left(4\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos(3\pi) + i\,\sin(3\pi)\right) = \left(4\sqrt{2}\right)^{12}\left((-1) + i\,(0)\right)$

و منه $a^{12} = -\left(4\sqrt{2}\right)^{12}$

و بالتالي العدد a^{12} عدد حقيقي سالب .

2) أ- لتكن $M'(z')$ صورة $M(z)$ بالدوران R الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$

لدينا : $z'-c=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-c)$

إذن : $z'-(3+4i)=i(z-(3+4i))$

إذن : $z'-3-4i=i(z-3-4i)=iz-3i+4$

إذن : $z'=iz-3i+4+3+4i$

و منه : $z'=iz+7+i$

ب- لدينا $D(d)$ صورة النقطة $A(a)$ بالدوران R

إذن : $d=ia+7+i$

إذن : $d=i(4+4i)+7+i$

إذن : $d=4i-4+7+i$

و منه : $d=3+5i$

ج-

✓ لنحدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث : $|z-3-5i|=|z-4-4i|$

$$|z-(3+5i)|=|z-(4+4i)|$$

$$|z-d|=|z-a|$$

$$DM=AM$$

إذن مجموعة النقط M هي المستقيم (Δ) و اسط القطعة $[AD]$

✓ لدينا : $R(A)=D$ إذن $DC=AC$ و منه $C\in(\Delta)$

✓ و لدينا : $DB=AB=\sqrt{5}$ إذن $B\in(\Delta)$

و بالتالي مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث : $|z-3-5i|=|z-4-4i|$ هي المستقيم

$$(\Delta)=(BC)$$

تصحيح التمرين الرابع

التجربة " سحب بالتتابع و بإحلال ثلاث بيدقات من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات التجربة.

لدينا : $card\,\Omega=5^3=125$

1) A الحدث : " البيدقات الثلاث المسحوبة من نفس اللون "

" 3 بيضاء " أو " 3 خضراء " أو " 3 حمراء "

لدينا : $cardA=2^3+2^3+1^3=17$

إذن : $p(A)=\dfrac{cardA}{card\,\Omega}=\dfrac{17}{125}$

2) X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد البيدقات البيضاء المسحوبة .

القيم التي يأخذها X:

$$\overline{B},\overline{B},\overline{B} \quad \rightarrow \quad X=0$$

$$\begin{cases} B,\overline{B},\overline{B} \\ \overline{B},B,\overline{B} \\ \overline{B},\overline{B},B \end{cases} \quad \rightarrow \quad X=1$$

$$\begin{cases} B,B,\overline{B} \\ B,\overline{B},B \\ \overline{B},B,B \end{cases} \quad \rightarrow \quad X=2$$

$$B,B,B \quad \rightarrow \quad X=3$$

لنحدد قانون احتمال X :

$$p(X=0)=\frac{3^3}{125}=\frac{27}{125}$$

$$p(X=1)=\frac{3\times\left(2^1\times3^2\right)}{125}=\frac{54}{125}$$

$$p(X=2)=\frac{3\times\left(2^2\times3^1\right)}{125}=\frac{36}{125}$$

$$p(X=3)=\frac{2^3}{125}=\frac{8}{125}$$

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

تصحيح التمرين الخامس

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-x+x\ln x$

1) أ- ليكن $x\in\,]0,+\infty[$:

$$g'(x)=(1-x+x\ln x)'=-1+(x)'\ln(x)+x\ln'(x)=-1+\ln(x)+x\times\frac{1}{x}=-1+\ln(x)+1$$

إذن : $g'(x)=\ln x$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- ليكن $x\in]0,+\infty[$:

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $\ln(x)$.

x	$0 \quad\quad 1 \quad +\infty$
$ln(x)$	$- \quad 0 \quad +$

على المجال $]0,1]$: $g'(x)\leq 0$ إذن g تناقصية

و على المجال $[1,+\infty[$: $g'(x)\geq 0$ إذن g تزايدية

(2

✓ $g(1)=1-1+1.\ln 1=0$

✓ لدينا $g(1)$ هي القيمة الدنوية للدالة g على $]0,+\infty[$

إذن : $g(x)\geq g(1) \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$

و منه : $g(x)\geq 0 \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$

▪II نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=3-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2\ln x}{x}$

1) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2\ln x}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{3x^2-1-2x\ln x}{x^2}=-\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3x^2-1=-1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2=0^+\end{cases}$

التأويل الهندسي :

(C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

2) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 3-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2\ln x}{x}=3$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\end{cases}$

التأويل الهندسي :

(C) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=3$ بجوار $+\infty$

3) أ- ليكن $x\in\left]0,+\infty\right[$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(3-\frac{1}{x^2}-2\frac{\ln x}{x}\right)'\\&=0-\frac{-(x^2)'}{(x^2)^2}-2\times\frac{\ln'(x)\times x-\ln(x)\times(x)'}{x^2}\\&=\frac{2x}{x^4}-2\times\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)\times 1}{x^2}\\&=\frac{2}{x^3}-2\times\frac{1-\ln x}{x^2}\\&=\frac{2-2x+2x\ln x}{x^3}\\&=\frac{2\times(1-x+x\ln x)}{x^3}\\&=\frac{2g(x)}{x^3}\end{aligned}$$

إذن : $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x^3}$ لكل x من $\left]0,+\infty\right[$

ب- لدينا : $f'(1)=\dfrac{2g(1)}{1^3}=0$ إذن (C) يقبل مماسا أفقيا في النقطة $A(1,2)$

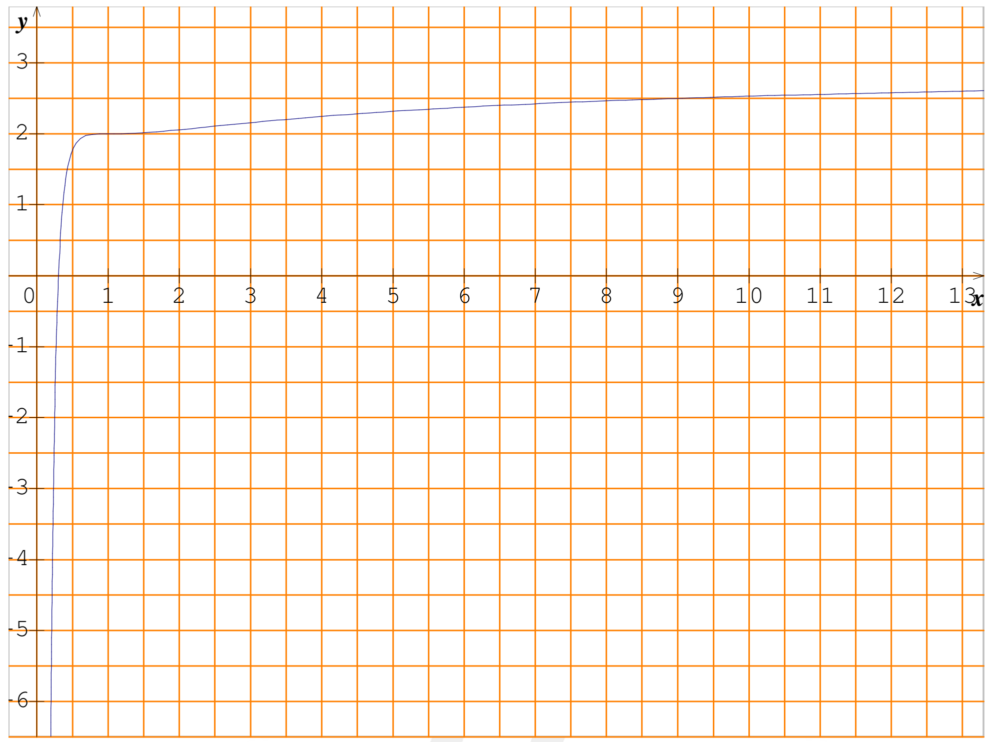
ج- ليكن $x\in\left]0,+\infty\right[$:

لدينا : ليكن $x^3>0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ و حسب نتيجة I - 2) لدينا $g(x)\geq 0$

إذن : $f'(x)\geq 0$ لكل x من $\left]0,+\infty\right[$

و بالتالي الدالة f تزايدية على المجال $\left]0,+\infty\right[$

4)



5) أ- $\int_1^e \frac{2\ln x}{x}dx = 2\int_1^e \frac{1}{x}\times\ln(x)dx = 2\int_1^e \ln'(x)\ln(x)dx = 2\left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e = 1$

ت- لدينا : $A = \int_1^e |f(x)|dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

على المجال $[1,e]$: لدينا $f(x) \geq 0$

إذن : $A = \int_1^e f(x)dx \times 1cm \times 1cm$

إذن $A = \int_1^e \left(3 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x}\right)dx .cm^2$

إذن : $A = \left(\int_1^e \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)dx - \int_1^e 2\frac{\ln x}{x}dx\right).cm^2$

إذن : $A = \left(\left[3x + \frac{1}{x}\right]_1^e - 1\right).cm^2$

و منه : $A = \left(3e + \frac{1}{e} - 5\right).cm^2$

6) لتكن h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $h(x)=3-\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(x^2)}{|x|}$

أ-

•

✓ لدينا لكل x من $\mathbb{R}^*$: $-x\in\mathbb{R}^*$

✓ ليكن $x\in\mathbb{R}^*$:

$$h(-x)=3-\frac{1}{(-x)^2}-\frac{\ln\left((-x)^2\right)}{|-x|}=3-\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(x^2)}{|x|}=h(x)$$

إذن : لدينا لكل x من $\mathbb{R}^*$: $h(-x)=h(x)$

و منه الدالة h زوجية

• ليكن $x\in\left]0,+\infty\right[$: لدينا $|x|=x$ و $\ln(x^2)=2\ln(x)$

إذن $h(x)=3-\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(x^2)}{|x|}=3-\frac{1}{x^2}-2\frac{\ln x}{x}$

و منه $h(x)=f(x)$ لكل x من $\left]0,+\infty\right[$

ب-

لدينا $h(x)=f(x)$ لكل x من $\left]0,+\infty\right[$ و بما أن الدالة h زوجية فإن (C') متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب.