الثانية إقتصاد وتدبير

تصحيح الامتحان الوطني لـ 2016 – د. استدراكية

التمرين الأول : ($4,5$ ن)

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **المعرفة بما يلي :** $u_0=0$ **و** $n\in\mathbb{N}$ $\quad u_{n+1}=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$	
1. أحسب u_1 **و** u_2	$0,5$
2. أ- تحقق أن لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1}+1=\dfrac{2(u_n+1)}{u_n+3}$	$0,5$
ب- بين بالترجع أن لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n>-1$	$0,5$
ج- تحقق أن لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{(u_n+1)^2}{u_n+3}$	$0,5$
د- استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متتالية تناقصية و أنها متقاربة.**	$0,5$
3. نضع $v_n=\dfrac{u_n+2}{u_n+1}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$	
أ- أحسب v_0	$0,25$
ب- بين أن لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $v_{n+1}=\dfrac{3u_n+5}{2(u_n+1)}$	$0,25$
ج- بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **متتالية حسابية أساسها** $\dfrac{1}{2}$	$0,5$
د- أحسب v_n **بدلالة** n	$0,25$
4. أ- تحقق أن لكل n **من** $\mathbb{N}$ **:** $u_n=\dfrac{-v_n+2}{v_n-1}$	$0,25$
ب- استنتج أن $u_n=\dfrac{-n}{n+2}$ **لكل** n **من** $\mathbb{N}$	$0,25$
ج- أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$	$0,25$

التمرين الثاني : ($4,5$ ن) (تقدم جميع نتائج هذا التمرين على شكل كسر)

يحتوي كيس على إحدى عشرة كرة غير قابلة للتمييز باللمس ، ثلاث منها بيضاء و أربع منها خضراء و أربع منها حمراء . **نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الكيس .** **1. نعتبر الأحداث التالية :** A **: " الكرات الثلاث المسحوبة من نفس اللون "**	

B : " سحب كرة واحدة بالضبط من كل اللون "

C : " الكرات الثلاث المسحوبة من لونين مختلفين "

1	أ- بين أن احتمال A هو : $p(A)=\frac{3}{55}$
1	ب- أحسب احتمال الحدث B
0,5	ج- استنتج أن $p(C)=\frac{36}{55}$
	2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة .
1,5	أ- أتمم ملء الجدول جانبه بعد نقله على ورقة تحريرك معللا جوابك
0,5	ب- أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$		$\frac{84}{165}$		

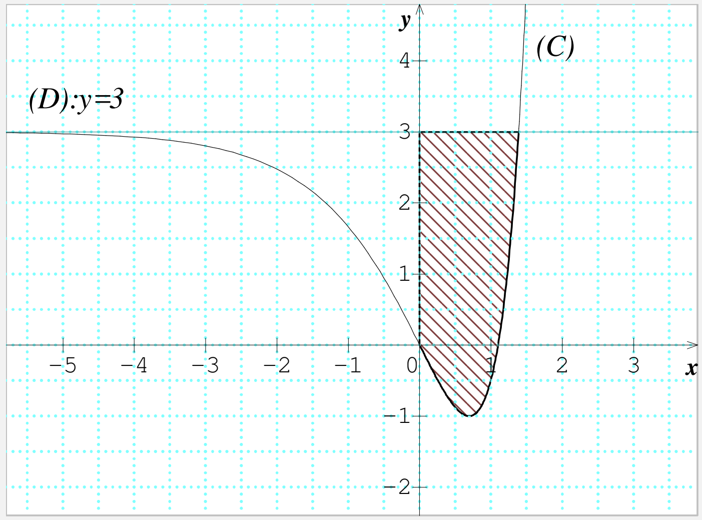
التمرين الثالث : (11 ن)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=e^{2x}-4e^{x}+3$

و ليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

0,5	1. تحقق أن $f(x)=e^{x}(e^{x}-4)+3$ لكل x من $\mathbb{R}$
0,75	2. أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .
1,25	ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة .
1	3. أ- بين أن $f'(x)=2e^{x}(e^{x}-2)$ لكل x من $\mathbb{R}$
1,5	ب- أدرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
1,5	4. تحقق أن $(e^{x}-1)(e^{x}-3)=f(x)$ ثم حدد نقطتي تقاطع المنحنى (C) مع محور الأفاصيل
0,5	5. أ- بين أن $f''(x)=4e^{x}(e^{x}-1)$ لكل x من $\mathbb{R}$
1,5	ب- أدرس إشارة $f''(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج أن $O(0,0)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C)
0,5	6. حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة $O(0,0)$
	7. في الشكل أسفله ، (C) هو التمثيل المبياني للدالة f و (D) هو المستقيم ذو المعادلة $y=3$

أ- حدد نقط تقاطع $\left(C\right)$ و المستقيم $\left(D\right)$	0,5
ب- أحسب مساحة الحيز المخدش	1,5



تصحيح التمرين الأول

.1

$$u_1=\frac{u_0-1}{u_0+3}=\frac{0-1}{0+3}=\frac{-1}{3}$$

$$u_2=\frac{u_1-1}{u_1+3}=\frac{\frac{-1}{3}-1}{\frac{-1}{3}+3}=\frac{-\frac{4}{3}}{\frac{8}{3}}=\frac{-4}{8}=\frac{-1}{2}$$

.2 أ- ليكن $n\in\mathbb{N}$:

لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1}+1 &= \frac{u_n-1}{u_n+3}+1 \\ &= \frac{u_n-1+u_n+3}{u_n+3} \\ &= \frac{2u_n+2}{u_n+3} \\ &= \frac{2(u_n+1)}{u_n+3} \end{aligned}$$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}+1=\dfrac{2(u_n+1)}{u_n+3}$

ب-

✓ من أجل $n=0$:

لدينا : $u_0=0$

إذن : $u_0>-1$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

- نفترض أن : $u_n>-1$
- و نبين أن : $u_{n+1}>-1$

لدينا : $u_{n+1}+1=\dfrac{2(u_n+1)}{u_n+3}$ و حسب الإفتراض $u_n>-1$

إذن : $u_n+1>0$ و $u_n+3>2>0$

و منه : $\dfrac{2(u_n+1)}{u_n+3}>0$

و بالتالي : $u_{n+1}+1>0$

إذن : $u_{n+1}>-1$

✓ نستنتج : لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n > -1$

ج- ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n - 1}{u_n + 3} - u_n \\ &= \frac{u_n - 1 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 3} \\ &= \frac{-u_n^2 - 2u_n - 1}{u_n + 3} \\ &= \frac{-(u_n + 1)^2}{u_n + 3} \end{aligned}$$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n + 1)^2}{u_n + 3}$

د-

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

لدينا : $(u_n + 1)^2 > 0$ و $u_n + 3 > 0$

إذن : $-\dfrac{(u_n + 1)^2}{u_n + 3} < 0$

و منه : $u_{n+1} - u_n < 0$ ، لكل n من $\mathbb{N}$.

و بالتالي : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية.

✓ بما أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية و مصغورة فإنها متقاربة.

.3 أ- $v_0 = \dfrac{u_0 + 2}{u_0 + 1} = \dfrac{0 + 2}{0 + 1} = \dfrac{2}{1} = 2$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{u_n-1}{u_n+3}+2}{\frac{2(u_n+1)}{u_n+3}} = \frac{\frac{u_n-1+2u_n+6}{u_n+3}}{\frac{2(u_n+1)}{u_n+3}} = \frac{3u_n+5}{2(u_n+1)}$$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \dfrac{3u_n+5}{2(u_n+1)}$

ج- ليكن $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1}-v_n = \frac{3u_n+5}{2(u_n+1)} - \frac{u_n+2}{u_n+1} = \frac{3u_n+5-2u_n-4}{2(u_n+1)} = \frac{u_n+1}{2(u_n+1)} = \frac{1}{2}$$

إذن : لكل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1}-v_n = \dfrac{1}{2}$

و منه المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $r = \dfrac{1}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 2$

د- ليكن $n \in \mathbb{N}$

لدينا : $v_n = v_0 + nr$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$ ، $v_n = 2 + \dfrac{1}{2}n$

4. أ- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} \Leftrightarrow u_n v_n + v_n = u_n + 2$$

$$\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = -v_n + 2$$

$$\Leftrightarrow u_n\left(v_n - 1\right) = -v_n + 2$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{-v_n + 2}{v_n - 1}$$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n = \dfrac{-v_n + 2}{v_n - 1}$

ب- ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{-v_n + 2}{v_n - 1}$$

$$= \frac{-2 - \frac{n}{2} + 2}{2 + \frac{n}{2} - 1}$$

$$= \frac{\frac{-n}{2}}{\frac{n}{2} + 1}$$

$$= \frac{\frac{-n}{2}}{\frac{n+2}{2}}$$

$$= \frac{-n}{n+2}$$

إذن : $u_n = \dfrac{-n}{n+2}$ لكل n من $\mathbb{N}$

ج- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-n}{n+2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-n}{n} = -1$

تصحيح التمرين الثاني

التجربة " سحب في آن واحد ثلاث كرات من الكيس "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

لدينا : $card\,\Omega = C_{11}^{3} = 165$

.1

أ- A : " الكرات الثلاث المسحوبة من نفس اللون "

R,R,R أو V,V,V أو B,B,B

لدينا : $cardA = C_3^3 + C_4^3 + C_4^3 = 1+4+4 = 9$

إذن : $p(A) = \dfrac{cardA}{card\,\Omega} = \dfrac{9}{165} = \dfrac{3}{55}$

ب- B : " سحب كرة واحدة بالضبط من كل اللون "

B,R,V

لدينا : $cardB = C_3^1 \times C_4^1 \times C_4^1 = 3\times 4\times 4 = 48$

إذن : $p(B) = \dfrac{cardB}{card\,\Omega} = \dfrac{48}{165} = \dfrac{16}{55}$

ج- C : " الكرات الثلاث المسحوبة من لونين مختلفين "

$$p(C) = 1 - p(A) - p(B) = 1 - \frac{3}{55} - \frac{16}{55} = \frac{36}{55}$$

.2 ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

أ-

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\dfrac{56}{165}$	$\dfrac{84}{165}$	$\dfrac{24}{165}$	$\dfrac{1}{165}$

لأن :

- ✓ $p(X=0) = \dfrac{C_8^3}{165} = \dfrac{56}{165}$
- ✓ $p(X=1) = \dfrac{C_3^1 \times C_8^2}{165} = \dfrac{3\times 28}{165} = \dfrac{84}{165}$
- ✓ $p(X=2) = \dfrac{C_3^2 \times C_8^1}{165} = \dfrac{3\times 8}{165} = \dfrac{24}{165}$
- ✓ $p(X=3) = \dfrac{C_3^3}{165} = \dfrac{1}{165}$

ب- الأمل الرياضي :

$$E(X)=\left(0\times\frac{56}{165}\right)+\left(1\times\frac{84}{165}\right)+\left(2\times\frac{24}{165}\right)+\left(3\times\frac{1}{165}\right)=\frac{135}{165}=\frac{9}{11}$$

تصحيح التمرين الثالث

.1 ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x}-4e^{x}+3\\ &= e^{x}\times e^{x}-4\times e^{x}+3\\ &= e^{x}\left(e^{x}-4\right)+3 \end{aligned}$$

إذن : $f(x)=e^{x}\left(e^{x}-4\right)+3$ لكل x من $\mathbb{R}$

.2 **أ-**

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}\left(e^{x}-4\right)+3=3$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}-4=-4\end{cases}$

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3 \Leftarrow$ (C) يقبل فرعا مقاربا أفقيا معادلته $y=3$ بجوار $-\infty$

ب-

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left(e^{x}-4\right)+3=+\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-4=+\infty\end{cases}$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\left(e^{x}-4\right)+3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}\left(e^{x}-4\right)+\frac{3}{x}=+\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 4 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0 \end{cases}$

✓ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases} \Leftarrow$ (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

.3 **أ-** ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{2x} - 4e^x + 3\right)' \\ &= 2e^{2x} - 4e^x \\ &= 2e^x\left(e^x - 2\right) \end{aligned}$$

إذن : $f'(x) = 2e^x\left(e^x - 2\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا : $2e^x > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $e^x - 2$

x	$-\infty$ $\quad ln2 \quad$ $+\infty$
$ex-2$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

- على المجال $]-\infty, \ln 2]$: $e^x - 2 \le 0$
  إذن $f'(x) \le 0$
- على المجال $[\ln 2, +\infty[$: $e^x - 2 \ge 0$
  إذن $f'(x) \ge 0$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		$ln2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(ln2)=-1$	$\nearrow$	$+\infty$

.4 ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(e^x-1)(e^x-3) &= e^{2x}-3e^x-e^x+3\\ &= e^{2x}-4e^x+3\\ &= f(x)\end{aligned}$$

إذن : $(e^x-1)(e^x-3)=f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

لنحدد نقطتي تقاطع (C) مع محور الأفاصيل :

أفاصيل نقط تقاطع (C) مع محور الأفاصيل هي حلول المعادلة $f(x)=0$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (e^x-1)(e^x-3)=0$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \quad \text{أو} \quad e^x-3=0$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad \text{أو} \quad x=\ln 3$$

إذن نقطتي تقاطع (C) مع محور الأفاصيل هما : $A(\ln 3,0)$ و $O(0,0)$

5. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f''(x) &= \left(2e^x(e^x-2)\right)'\\ &= (2e^x)'(e^x-2)+2e^x(e^x-2)'\\ &= 2e^x(e^x-2)+2e^x\times e^x\\ &= 2e^x(e^x-2+e^x)\\ &= 2e^x(2e^x-2)\\ &= 4e^x(e^x-1)\end{aligned}$$

إذن : $f''(x)=4e^x(e^x-1)$ **لكل** x **من** $\mathbb{R}$

ب- لدينا $4e^x>0$ إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة e^x-1

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$ex-1$	$-$ 0 $+$

إذن :

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f''(x)$	$-$ 0 $+$

بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند 0 فإن النقطة $O(0,0)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C)

6. معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة $O(0,0)$ هي :

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

لدينا : $f'(0)=-2$ و $f(0)=0$

إذن : $y=-2x$ هي معادلة المماس (T)

7. أ- نقط تقاطع (C) مع المستقيم (D)

نحل المعادلة $f(x)=3$

$$\begin{aligned} f(x)=3 &\Leftrightarrow e^x\left(e^x-4\right)+3=3 \\ &\Leftrightarrow e^x\left(e^x-4\right)=0 \\ &\Leftrightarrow e^x-4=0\left(e^x>0\right) \\ &\Leftrightarrow e^x=4 \\ &\Leftrightarrow x=\ln 4 \end{aligned}$$

و منه (C) يقطع المستقيم (D) في نقطة وحيدة $B(\ln 4,3)$

ب- مساحة الحيز المخدش : (الحيز المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D)

و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=\ln 4$

$$A=\int_0^{\ln 4}\left|f(x)-3\right|dx.(UA)$$

بما أن على المجال $[0,\ln 4]$: $f(x)-3\leq 0$

فإن : $$A=\int_0^{\ln 4}\left(3-f(x)\right)dx.(UA)$$

إذن : $$A=\int_0^{\ln 4}\left(4e^x-e^{2x}\right)dx.(UA)$$

إذن : $$A=\left[4e^x-2e^{2x}\right]_0^{\ln 4}.(UA)$$

إذن : $$A=\left(\left(16-8\right)-\left(4-\frac{1}{2}\right)\right).(UA)$$

و منه : $$A=\left(\frac{9}{2}\right).(UA)$$

つづく