الدوال الأسّية

التمرين 3

مسألة

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$.

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (وحدة القياس $4cm$)

الجزء الأول

لتكن الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x)=x+2-e^x$

1) أدرس تغيرات g على $[0,+\infty[$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2) أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $[0,+\infty[$

ب- تحقق أن $1,14<\alpha<1,15$

3) أدرس إشارة $g(x)$ على $[0,+\infty[$

الجزء الثاني

1) أ- بين أن لكل x من $[0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$

ب- استنتج تغيرات f على $[0,+\infty[$

2) أ- بين أن لكل $x\geq 0$: $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و أول هندسيا النتيجة

3) أ- بين أن $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$

ب- اعط تأطيرا ل $f(\alpha)$ سعته 10^{-2}

4) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 0

5) أ- بين أن لكل x من $[0,+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$ حيث $u(x)=e^x-xe^x-1$

ب- أدرس تغيرات الدالة u على $[0,+\infty[$ و استنتج إشارة $u(x)$ على $[0,+\infty[$

ج- أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و (T)

6) أنشئ (C_f) و (T)

الجزء الثالث

1) حدد دالة أصلية ل f على $[0,+\infty[$ (يمكنك استعمال الجزء الثاني السؤال 2))

2) نرمز ب $\mathcal{D}$ الحيز المحصور بين (C_f) و (T) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$

أحسب ب cm^2 المساحة $\mathcal{A}$ للحيز $\mathcal{D}$

3) لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع $v_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

أ- أحسب v_0 ، v_1 و v_2

ب- بين أن لكل $n \geq 2$: $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

تصحيح المسألة:

الجزء الأول

1)

- ليكن $x \in [0,+\infty[$:

$$g'(x) = \left(x+2-e^x\right)' = 1-e^x$$

لدينا : $x \geq 0$ إذن $e^x \geq e^0$

إذن $e^x \geq 1$

إذن $-e^x \leq -1$

إذن $1-e^x \leq 0$

و منه $\forall x \in [0,+\infty[\quad g'(x) \leq 0$

و لدينا : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

و بالتالي الدالة g تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$.

- $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x+2-e^x = \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x}\right) = -\infty$$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \end{cases}$

2) أ- لنبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0,+\infty[$

بما أن :

- ✓ الدالة g **متصلة** على $[0,+\infty[$ (مجموع دوال متصلة على $[0,+\infty[$)
- ✓ الدالة g **تناقصية قطعا** على $[0,+\infty[$
- ✓ لدينا : $g([0,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right] =]-\infty,1]$ إذن $\underline{\underline{0 \in g([0,+\infty[)}}$

فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0,+\infty[$.

ب- لدينا :

- ✓ g **متصلة** على $[1,14;1,15]$
- ✓ $g(1,14)\times g(1,15)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $1,14<\alpha<1,15$

ج-

- ✓ الحالة 1: إذا كان $x\geq\alpha$

نعلم أن g تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$

إذن $g(x)\leq g(\alpha)$

و منه $g(x)\leq 0$ (لأن $g(\alpha)=0$)

- ✓ الحالة 2: إذا كان $0\leq x\leq\alpha$

نعلم أن g تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$

إذن $g(x)\geq g(\alpha)$

و منه $g(x)\geq 0$ (لأن $g(\alpha)=0$)

الجزء الثاني

1) أ- ليكن $x\in[0,+\infty[$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$

لدينا : $$f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{xe^x+1}\right)'=\frac{(e^x-1)'.(xe^x+1)-(e^x-1)(xe^x+1)'}{(xe^x+1)^2}$$

إذن : $$f'(x)=\frac{e^x.(xe^x+1)-(e^x-1)\left((x)'e^x+x(e^x)'+0\right)}{(xe^x+1)^2}$$

إذن : $$f'(x)=\frac{e^x.(xe^x+1)-(e^x-1)(e^x+xe^x)}{(xe^x+1)^2}=\frac{e^x.(xe^x+1)-(e^x-1).(1+x).e^x}{(xe^x+1)^2}$$

إذن : $$f'(x)=\frac{e^x.\left[(xe^x+1)-(e^x-1).(1+x)\right]}{(xe^x+1)^2}=\frac{e^x\left[xe^x+1-e^x-xe^x+1+x\right]}{(xe^x+1)^2}$$

إذن : $$f'(x)=\frac{e^x\left[x+2-e^x\right]}{(xe^x+1)^2}$$

و منه : لكل x من $[0,+\infty[$: $$f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$$

ب- **على المجال** $[0,\alpha]$ **:**

لدينا : $e^x>0$ و $0<0$ $(xe^x+1)^2>0$

و حسب نتيجة الجزء الأول السؤال ج- : $g(x)\geq 0$

إذن $f'(x)\geq 0$ و منه الدالة f تزايدية

على المجال $[\alpha,+\infty[$ **:**

لدينا : $e^x>0$ و $(xe^x+1)^2>0$

و حسب نتيجة الجزء الأول السؤال ج- : $g(x)\leq 0$

إذن $f'(x)\leq 0$ و منه الدالة f تناقصية

2) **أ-** ليكن $x\in[0,+\infty[$:

لدينا :
$$f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}=\frac{\cancel{e^x}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(x+\frac{1}{e^x}\right)}=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$$

إذن : لكل $x\geq 0$: $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

ب-

- لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}=0$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{t\to-\infty}e^t=0$ $\begin{pmatrix}t=-x\\x\to+\infty\\t\to-\infty\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}1+e^{-x}=1\\\lim\limits_{x\to+\infty}x+e^{-x}=+\infty\end{cases}$$

- بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ فإن (C_f) يقبل مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$

3) **أ-** لدينا : $f(\alpha)=\dfrac{e^\alpha-1}{\alpha e^\alpha+1}$

و نعلم أن α حل للمعادلة $g(x)=0$ إذن : $g(\alpha)=0$

إذن لدينا :
$$\begin{aligned}g(\alpha)=0\;&\Leftrightarrow\;\alpha+2-e^\alpha=0\\&\Leftrightarrow\;e^\alpha=\alpha+2\end{aligned}$$

و منه : $f(\alpha)=\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}=\dfrac{(\alpha+2)-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}=\dfrac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}=\dfrac{1}{\alpha+1}$

و بالتالي : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$

ب- لدينا : $1,14<\alpha<1,15$ إذن : $2,14<1+\alpha<2,15$

إذن : $\dfrac{1}{2,15}<\dfrac{1}{1+\alpha}<\dfrac{1}{2,14}$

إذن : $0,46<\dfrac{1}{2,15}<\dfrac{1}{1+\alpha}<\dfrac{1}{2,14}<0,47$

و منه : $0,46<f(\alpha)<0,47$ و هذا تأطير للعدد $f(\alpha)$ سعته $0,47-0,46=0,01=10^{-2}$

4) معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 0 :

$$y=f'(0).(x-0)+f(0)$$

لدينا : $f'(0)=1$ و $f(0)=0$ إذن : $y=1.(x-0)+0$ أي : $y=x$

5) أ- ليكن x من $]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
f(x)-x &= \frac{e^x-1}{xe^x+1}-x \\
&= \frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1} \\
&= \frac{(1-x^2)e^x-(1+x)}{xe^x+1} \\
&= \frac{(1+x)(1-x)e^x-(1+x)}{xe^x+1} \\
&= \frac{(1+x)\left[(1-x)e^x-1\right]}{xe^x+1} \\
&= \frac{(1+x)(e^x-xe^x-1)}{xe^x+1}
\end{aligned}$$

إذن : لكل x من $]0,+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$ حيث $u(x)=e^x-xe^x-1$

ب- اندرس تغيرات الدالة u

ليكن x من $]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \left(e^{x}-xe^{x}-1\right)' \\ &= \left(e^{x}\right)'-\left(xe^{x}\right)'+0 \\ &= e^{x}-\left((x)'e^{x}+x\left(e^{x}\right)'\right) \\ &= e^{x}-\left(e^{x}+xe^{x}\right) \\ &= e^{x}-e^{x}-xe^{x} \\ &= -xe^{x} \end{aligned}$$

لدينا : $x\geq 0$ و $e^{x}>0$ إذن : $u'(x)\leq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$

إذن الدالة u تناقصية .

و بما أن $x\geq 0$ و u تناقصية فإن : $u(x)\leq u(0)$ أي : $u(x)\leq 0$ (لأن $u(0)=0$)

ج- ليكن x من $[0,+\infty[$:

لندرس الوضع النسبي ل (C_f) و (T)

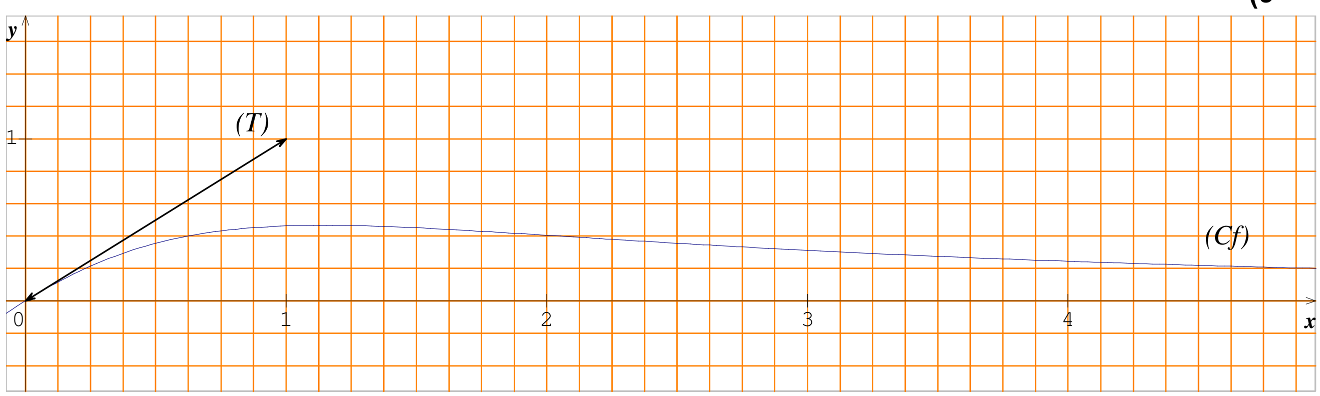
لدينا : $f(x)-x=\dfrac{(x+1)u(x)}{xe^{x}+1}$

و لدينا $x\geq 0$ إذن $xe^{x}+1>0$ و $x+1>0$ و منه إشارة $f(x)-x$ هي إشارة $u(x)$

و حسب نتيجة لسؤال السابق لدينا : $u(x)\leq 0$ و منه $f(x)-x\leq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$

و بالتالي : (C_f) يوجد تحت المستقيم (T)

6)



الجزء الثالث

1) لنحدد دالة أصلية ل f على $[0,+\infty[$

الدلة f متصلة على $[0,+\infty[$ إذن f تقبل دالة أصلية F على $[0,+\infty[$

ليكن x من $[0,+\infty[$:

لدينا حسب نتيجة السؤال 2) في الجزء الثاني : $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

إذن : $f(x)=\dfrac{\left(x+e^{-x}\right)'}{x+e^{-x}}$

و منه لكل x من $[0,+\infty[$: $F(x)=\ln\left|x+e^{-x}\right|=\ln\left(x+e^{-x}\right)$ (لأن $x+e^{-x}>0$)

(2

لدينا : $\mathcal{A}=\int_0^1\left|f(x)-x\right|dx\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

وبما أن $f(x)-x\leq 0$ لكل x من $[0,+\infty[$

فإن : $\mathcal{A}=\int_0^1(x-f(x))dx\times 4cm\times 4cm$

إذن : $\mathcal{A}=\left[\frac{x^2}{2}-F(x)\right]_0^1\times 16cm^2$

إذن : $\mathcal{A}=\left[\frac{x^2}{2}-\ln\left(x+e^{-x}\right)\right]_0^1\times 16cm^2$

إذن : $\mathcal{A}=\left(\frac{1}{2}-\ln\left(1+e^{-1}\right)\right)\times 16cm^2$

و منه : $\mathcal{A}=\left(8-16\ln\left(1+e^{-1}\right)\right)cm^2$

(3 **أ-** لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع $v_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$

$$v_0=\int_0^1 f(x)dx=\left[F(x)\right]_0^1=\left[\ln\left(x+e^{-x}\right)\right]_0^1=\ln\left(1+e^{-1}\right)$$

$$v_1=\int_1^2 f(x)dx=\left[F(x)\right]_1^2=\left[\ln\left(x+e^{-x}\right)\right]_1^2=\ln\left(2+e^{-2}\right)-\ln\left(1+e^{-1}\right)$$

$$v_2=\int_2^3 f(x)dx=\left[F(x)\right]_2^3=\left[\ln\left(x+e^{-x}\right)\right]_2^3=\ln\left(3+e^{-3}\right)-\ln\left(2+e^{-2}\right)$$

ب- لنبين أن لكل $n\geq 2$ **:** $f(n+1)\leq\int_n^{n+1}f(x)dx\leq f(n)$

- ليكن $x\in\mathbb{R}$ بحيث : $n\leq x\leq n+1$ و لدينا f تناقصية على المجال $[2,+\infty[$

  إذن : $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$

  إذن : $\int_n^{n+1}f(n+1)dx\leq\int_n^{n+1}f(x)dx\leq\int_n^{n+1}f(n)dx$

  إذن : $(n+1-n)f(n+1)\leq\int_n^{n+1}f(x)dx\leq(n+1-n)f(n)$

  و منه : $f(n+1)\leq\int_n^{n+1}f(x)dx\leq f(n)$

- نستنتج مما سبق أن $f(n+1)\leq v_n\leq f(n)$

  و بما أن $\lim_{x\to+\infty}f(n+1)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}f(n)=0$

  فإنه حسب مبرهنة الدرك : $\lim_{x\to+\infty}v_n=0$