~ الثانية علوم تجريبية ~

تصحيح الامتحان الوطني 2008

التمرين الأول : (3 ن)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$**، النقطتين** $A\left(0,-1,1\right)$ **و** $B\left(1,-1,0\right)$ **و الفلكة** (S) **التي معادلتها** $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$	
1) بين أن مركز الفلكة (S) **هي النقطة** $\Omega(1,0,2)$ **و أن شعاعها هو** $\sqrt{3}$ **و تحقق من أن** A **تنتمي إلى** (S)	$1,25$
2) حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ **و بين أن** $x+y+z=0$ **هي معادلة ديكارتية للمستوى** (OAB)	$1,25$
3) بين أن المستوى (OAB) **مماس للفلكة** (S) **في النقطة** A	$0,5$

التمرين الثاني : (3 ن)

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ **المعادلة :** $z^2-6z+34=0$	1
2) نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$**، النقط** A **و** B **و** C **التي ألحاقها على التوالي هي :** $a=3+5i$ **و** $b=3-5i$ **و** $c=7+3i$**. ليكن** z **لحق النقطة** M **من المستوى العقدي و** z' **لحق النقطة** M' **صورة** M **بالإزاحة** T **ذات المتجهة** $\vec{u}$ **التي لحقها** $4-2i$	
أ. بين أن : $z'=z+4-2i$ **ثم تحقق من أن النقطة** C **هي صورة النقطة** A **بالإزاحة** T	$0,75$
ب. بين أن : $\dfrac{b-c}{a-c}=2i$	$0,5$
ج. استنتج أن المثلث ABC **قائم الزاوية وأن** $BC=2AC$	$0,75$

التمرين الثالث : (3 ن)

يحتوي صندوق على ست كرات حمراء و ثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس)	
1) نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق	
أ. أحسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين و كرة خضراء	1
ب. بين أن احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل هو $\dfrac{16}{21}$	1
2) نعتبر في هذا السؤال التجربة التالية : نسحب عشوائيا بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق أحسب احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء	1

التمرين الرابع : (11 ن)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-2\ln x$

1) أ. أحسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$ — 0,5

ب. بين أن g تناقصية على $]0,2]$ و تزايدية على $[2,+\infty[$ — 0,5

2) استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$ (لاحظ أن $g(2)>0$) — 0,5

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-(\ln x)^2$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و أول النتيجة هندسيا — 0,75

2) أ. بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكنك وضع $t=\sqrt{x}$ ، نذكر أن $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$) — 0,5

ب. استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ وأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ (لاحظ أن : $f(x)=x\left(1-\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)$) — 0,75

ج. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثم استنتج أن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ — 0,5

د. بين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ). — 0,25

3) أ. بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$ و بين أن f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ — 0,75

ب. ضع جدول تغيرات الدالة f — 0,25

ج. بين أن $y=x$ هي معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (C) في النقطة التي أفصولها 1 . — 0,5

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$ و أن $\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}$ (نقبل أن $(\ln 2)^2<\dfrac{1}{2}$) — 0,5

5) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نقبل أن $I(e,e-1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C) و نأخذ $e\approx 2,7$) — 1

6) أ. بين أن : $H:x\mapsto x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $\ln:x\mapsto\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$ ثم بين أن : $\int_1^e \ln x\,dx=1$ — 0,5

ب. باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$ — 0,75

ج. أحسب مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ — 0,5

III. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) بين أن $1\le u_n\le 2$ لكل n من $\mathbb{N}$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال $(3-II)$ أ) . — 0,75

2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية . — 0,5

0,75	**3) استنتج أن (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها.**

تصحيح التمرين الأول

(1

✓

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in(S) &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+z^2-4z=-2 \\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+z^2-4z+4=-2+1+4 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=3 \\ &\Leftrightarrow (x-(1))^2+(y-(0))^2+(z-(2))^2=\left(\sqrt{3}\right)^2 \end{aligned}$$

إذن (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(1,0,2)$ و شعاعها $R=\sqrt{3}$

✓ لنتحقق أن $A(0,-1,1)$ تنتمي للفلكة (S)

لدينا : $(0)^2+(-1)^2+(1)^2-2(0)-4(1)+2=0+1+1-0-4+2=0$ إذن A تنتمي إلى (S)

(2

✓ لدينا : $\overrightarrow{OA}(0,-1,1)$ و $\overrightarrow{OB}(1,-1,0)$

إذن : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

✓ لدينا : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(1,1,1)$ متجهة منظمية للمستوى (OAB)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) تكتب على شكل : $1.x+1.y+1.z+d=0$

و لدينا $O(0,0,0)\in(OAB)$

إذن : $1.(0)+1.(0)+1.(0)+d=0$ و منه $d=0$

و بالتالي : $x+y+z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

(3

✓ لدينا : $d(\Omega,(OAB))=\dfrac{|(1)+(0)+(2)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

بما أن $d(\Omega,(OAB))=R$ فإن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S)

✓ لدينا $A\in(S)$ و $A\in(OAB)$ و بما أن (OAB) مماس للفلكة (S) فإن نقطة التماس هي النقطة A .

تصحيح التمرين الثاني

1) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+34=0$

لدينا $\Delta=(-6)^2-4(1)(34)=36-136=-100$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين

$$z=\frac{-(-6)+i\sqrt{100}}{2(1)} \quad \text{أو} \quad z=\frac{-(-6)-i\sqrt{100}}{2(1)}$$

$$z=3+5i \quad \text{أو} \quad z=3-5i$$

و بالتالي : $S=\{3-5i,3+5i\}$

2) أ.

✓

$$\begin{aligned} T(M)=M' &\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{u} \\ &\Leftrightarrow z'-z=z_{\vec{u}} \\ &\Leftrightarrow z'=z+z_{\vec{u}} \\ &\Leftrightarrow z'=z+4-2i \end{aligned}$$

✓ لدينا :

$$a+4-2i=3+5i+4-2i=7+3i=c$$

إذن النقطة C هي صورة النقطة A بالإزاحة T

ب.

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{a-c} &= \frac{(3-5i)-(7+3i)}{(3+5i)-(7+3i)} \\ &= \frac{-4-8i}{-4+2i} \\ &= \frac{2i(-4+2i)}{-4+2i} \\ &= 2i \end{aligned}$$

ج. لدينا : $\frac{b-c}{a-c}=2i=2.e^{i\frac{\pi}{2}}$

✓ لدينا : $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و منه المثلث ABC قائم الزاوية في C

✓ و لدينا : $\left|\frac{b-c}{a-c}\right|=2$ إذن $\frac{BC}{AC}=2$ ومنه $BC=2AC$.

تصحيح التمرين الثالث

التجربة " سحب في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق "
ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة
لدينا : $card\,\Omega = C_9^3 = 84$

1) أ. ليكن الحدث A " الحصول على كرتين حمراوين و كرة خضراء " R,R وV

$$cardA = C_6^2 \times C_3^1 = 15 \times 3 = 45$$

$$p(A) = \frac{cardA}{card\,\Omega} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

ب. ليكن الحدث B " الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل "
لدينا $\overline{B}$ " عدم الحصول على أية كرة خضراء " بمعنى " الحصول على ثلاث كرات حمراء "
لدينا : $card\,\overline{B} = C_6^3 = 20$ إذن $p(\overline{B}) = \frac{card\,\overline{B}}{card\,\Omega} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$
و منه $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$.

2) التجربة " سحب بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق "
ليكن Ω_1 كون إمكانيات هذه التجربة
لدينا : $card\,\Omega_1 = A_9^3 = 504$

ليكن الحدث C " الحصول على ثلاث كرات حمراء "
لدينا $cardC = A_6^3 = 120$
إذن $p(C) = \frac{cardC}{card\,\Omega} = \frac{120}{504} = \frac{5}{21}$

تصحيح التمرين الرابع

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = x - 2\ln x$
1) أ- ليكن $x \in]0,+\infty[$
الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ (كمجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0,+\infty[$)
لدينا : $g'(x) = (x - 2\ln x)' = 1 - 2.\frac{1}{x}$

إذن : $g'(x)=\frac{x-2}{x}\quad (\forall x\in]0,+\infty[)$

ب- ليكن $x\in]0,+\infty[$

لدينا : $g'(x)=\frac{x-2}{x}$

لدينا : $x>0$ إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-2$

x	$-\infty \quad 2 \quad +\infty$
$x-2$	$- \quad 0 \quad +$

- ✓ على المجال $]0,2]$: لدينا $x-2\leq 0$ إذن $g'(x)\leq 0$ و منه g تناقصية
- ✓ على المجال $[2,+\infty[$: لدينا $x-2\geq 0$ إذن $g'(x)\geq 0$ و منه g تزايدية

ج- لدينا : g تناقصية على المجال $]0,2]$ و تزايدية على المجال $[2,+\infty[$

إذن $g(2)$ هي القيمة الدنوية للدالة g على $]0,+\infty[$

إذن : $g(x)\geq g(2)\quad (\forall x\in]0,+\infty[)$

و لدينا : $g(2)=2-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0$

و منه : $g(x)>0\quad (\forall x\in]0,+\infty[)$

.II

(1

- ✓ لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x-(\ln x)^2=-\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x=0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)^2=+\infty \end{cases}$

- ✓ بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ فإن (C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

2) أ- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2$$

نضع $t=\sqrt{x}$ لدينا : $x\to+\infty$ إذن $t\to+\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(2.\dfrac{\ln(t)}{t}\right)^2=0$

لأن : $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$.

ب-

✓ ادينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)=+\infty$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\end{cases}$

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)=1$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$

ج-

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-(\ln x)^2=-\infty$

✓ لدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\infty\end{cases}$ إذن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم (Δ) **الذي معادلته** $y=x$ بجوار $+\infty$

3) أ-

- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

ليكن $x\in]0,+\infty[$:

لدينا : $f'(x)=\left(x-(\ln x)^2\right)'=1-2.\ln'(x).\ln x=1-\dfrac{2\ln x}{x}=\dfrac{x-2\ln x}{x}$

إذن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

- لدينا : $x>0$ و حسب الجزء $I)2($ لدينا : $g(x)>0$ إذن : $f'(x)>0$ و منه الدالة f تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$

ب- جدول تغيرات الدالة f:

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

ج- معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (C) في النقطة التي أفصولها 1 : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$: (1)

لدينا : $f'(1)=1$ و $f(1)=1$

إذن المعادلة تصبح : $y=1.(x-1)+1$

و منه : $y=x$ هي معادلة ديكارتية لمماس المنحنى (C) في النقطة التي أفصولها 1

4)

- لنبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$:

لدينا :

- f متصلة على المجال $]0,+\infty[$
- f تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$
- و لدينا : $f(]0,+\infty[)=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$ إذن $0\in f(]0,+\infty[)$

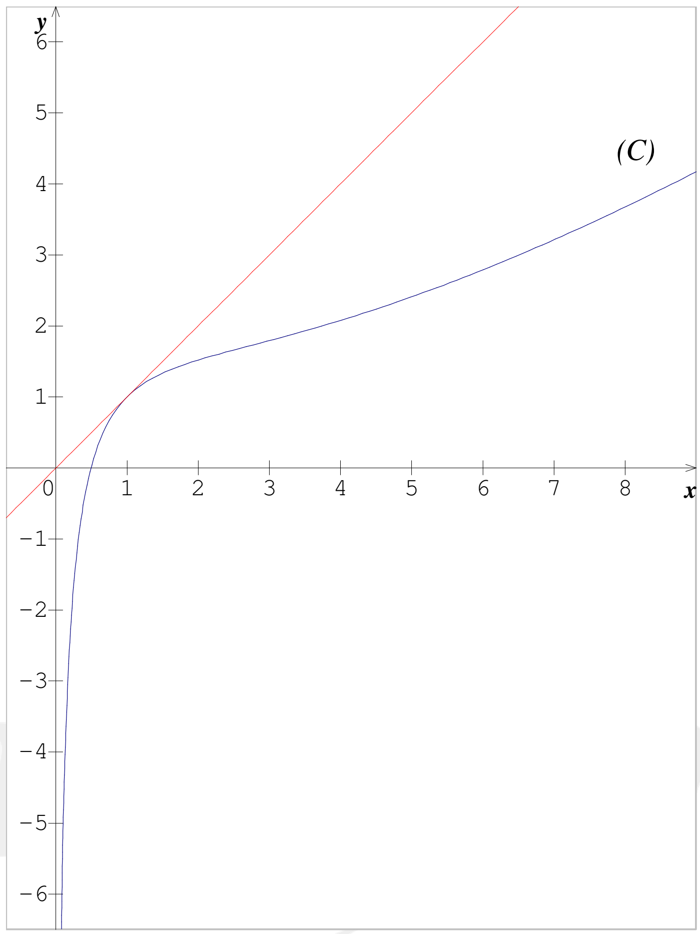
و بالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$

- لنتحقق أن $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$:

- لدينا f متصلة على المجال $\left[\frac{1}{e},\frac{1}{2}\right]$
- $$\begin{cases} f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1-e}{e}<0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-(\ln 2)^2>0 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)\times f\left(\frac{1}{2}\right)<0$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$

5) إنشاء (C) و (Δ) :



6) أ-

✓

- الدالة $H : x \mapsto x\ln x - x$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$
- ليكن $x \in]0,+\infty[$:

لدينا : $H'(x) = (x\ln x - x)' = (x)'\ln x + x\ln'(x) - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

إذن : $H'(x) = h(x) \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$

و بالتالي الدالة H دالة أصلية للدالة h على $]0,+\infty[$

✓ $\int_1^e \ln x dx = \int_1^e h(x)dx = [H(x)]_1^e = [x\ln(x) - x]_1^e = (e-e)-(0-1) = 1$

ب- لنحسب : $\int_1^e (\ln x)^2 dx$ باستعمال مكاملة بالأجزاء :

$$\begin{cases} U'(x)=1 \\ V(x)=(\ln x)^2 \end{cases} \swarrow \quad \begin{cases} U(x)=x \\ V'(x)=\dfrac{2\ln x}{x} \end{cases} \downarrow$$

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{2x\ln x}{x}dx = (e-0)-2\int_1^e \ln x dx = e-2$$

ج- مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^e |f(x)-x|dx \quad (U.A) \\ &= \int_1^e (x-f(x))dx \quad (U.A) \\ &= \int_1^e (\ln x)^2 dx \quad (U.A) \\ &= (e-2) \quad (U.A) \end{aligned}$$

III. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) لنبين أن $1\le u_n \le 2$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ من أجل $n=0$:

لدينا $u_0=2$

إذن : $1\le u_0 \le 2$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

- نفترض أن : $1\le u_n \le 2$
- و نبين أن : $1\le u_{n+1} \le 2$

لدينا حسب الافتراض : $1\le u_n \le 2$ و حسب نتيجة السؤال $II-3)$ أ) لدينا f تزايدية

إذن $f(1)\le f(u_n)\le f(2)$

إذن : $1\le u_{n+1}\le 2-(\ln 2)^2 \le 2$

و منه $1\le u_{n+1}\le 2$

✓ نستنتج أن : $1\le u_n \le 2$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) ليكن $n\in\mathbb{N}$:

لدينا : $u_{n+1}-u_n=-(\ln u_n)^2$

إذن $u_{n+1}-u_n\le 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه المتتالية (u_n) تناقصية

3) لدينا : $u_0 = 2 \in I = [1,2]$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ لدينا f متصلة على المجال $[1,2]$

✓ لدينا : $f([1,2]) = [f(1), f(2)] = \left[1, 2-(\ln 2)^2\right]$ إذن : $f([1,2]) \subset [1,2]$

✓ بما أن (u_n) تناقصية و مصغورة فإن (u_n) متقاربة

إذن نهاية المتتالية (u_n) هي حل للمعادلة $f(x) = x$

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow x - (\ln x)^2 = x \\ &\Leftrightarrow \ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1}$

つづく