مباراة الدخول إلى مسلك التكوين بمركز تكوين مفتشي التعليم

اختبار في المعارف المرتبطة بمواد الثانوي التأهيلي

التخصص : الرياضيات

مدة الإنجاز : 3 ساعات

الموضوع :

نعتبر المعادلة التالية :

$$(E):\quad x^2+y^2-z^2=0 \quad (x,y,z)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^3$$

نرمز ب S لمجموعة حلول المعادلة (E) و ب T لمجموعة العناصر $(x,y,z)\in S$ بحيث الأعداد x,y,z تكون أولية فيما بينها في مجموعها.

الجزء الأول

1) ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A.

أ) لنفترض أن $AB=1$ و $AC=\sqrt{n}$ مع n عدد صحيح طبيعي غير منعدم . أوجد المسافة BC.

ب) استنتج طريقة إنشاء قطعة طولها $\sqrt{3}$ باستعمال مسطرة غير مدرجة و بركار ، إنطلاقا من قطعة طولها 1.

2) أ) بين أنه لا يوجد أي مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه أعداد صحيحة طبيعية أحدها يساوي 1.

ب) بين أنه لا يوجد أي مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين أضلاعه أعداد صحيحة طبيعية.

3) أ) أوجد كل المثلثات قائمة الزاوية التي أطوال أضلاعها أعداد صحيحة طبيعية متتالية .

ب) ليكن $(a,\mathrm{b},\mathrm{c})\in\left(\mathbb{N}^*\right)^3$ حلا للمعادلة (E) بحيث $a<b<c$ و a,b,c هي حدود متتالية حسابية .

بين أن الأعداد a,b,c متناسبة في هذا الترتيب مع الأعداد $3,4,5$.

الجزء الثاني

ليكن $(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$ حلا للمعادلة (E) و $k\in\mathbb{N}^*$.

1) بين أن $(\mathrm{kx},\mathrm{ky},\mathrm{kz})$ حل للمعادلة (E) و استنتج أن المجموعة S غير منتهية .

2) نعتبر $(k,n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2$. بين التكافؤ

k يقسم n تكافئ k^2 يقسم n^2

3) نعتبر الآن (x,y,z) عنصرا من T

بين أن الأعداد x,y,z أولية فيما بينها مثنى مثنى .

4) بين أنه مهما يكن (x,y,z) عنصرا من S فإنه يوجد (u,v,w) عنصر وحيد من T و k عدد صحيح طبيعي غير منعدم وحيد بحيث : $(x,y,z)=(ku,kv,kw)$

5) ليكن $(u,v,w)\in T$

أ) بين أنه من بين الأعداد u و v و w واحد و واحد فقط هو عدد زوجي.

ب) بين أن w عدد فردي .

ج) استنتج أنه لكل (x,y,z) من S لدينا $x\neq y$.

6) ليكن $(u,v,w)\in T$. نفترض أن u فردي .

أ) نضع $t=\dfrac{w-u}{2}$, $s=\dfrac{u+w}{2}$, $r=\dfrac{v}{2}$

بين أن s و t عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمين و أوليان فيما بينهما .

ب) ليكن m و n عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين و أوليين فيما بينهما بحيث : $\dfrac{r}{t}=\dfrac{m}{n}$

بين أن $(u,v,w)=(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$ ، $n<m$ و أن m و n ليست لهما نفس الزوجية .

ج) استنتج الخاصية المميزة لعناصر المجموعة T الآتية :

$(u,v,w)\in T$ و u عدد فردي إذا وفقط إذا وجد m و n عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمين و أوليان فيما بينهما و ليست لهما نفس الزوجية بحيث $n<m$ و $(u,v,w)=(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$.

الزوج (m,n) يسمى مولدا للعنصر (u,v,w)

7) أ) ليكن p عددا أوليا بحيث $p\equiv 1[4]$. نقبل أنه يوجد عددان صحيحان طبيعيان m و n بحيث : $p=m^2+n^2$.

بين أنه يوجد مثلث قائم الزاوية طول وتره يساوي p .

استنتج أن مجموعة المثلثات قائمة الزاوية التي وترها عدد أولي هي مجموعة غير منتهية

ب) ليكن p عددا أوليا فرديا .

بين أن الزوج $\left(\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2}\right)$ مولد لعنصر من T

استنتج أنه يوجد ما لا نهاية من المثلثات قائمة الزاوية أطوال أضلاعها أعداد صحيحة طبيعية بحيث أحد ضلعي الزاوية القائمة هو عدد أولي فردي.

ج) هل يوجد مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه أعداد صحيحة طبيعية أحدها يساوي 2؟ علل جوابك

8) ليكن u و w عددين أوليين فرديين .

بين التكافؤ التالي :

$$u^2=2w-1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{يوجد } v\in\mathbb{N}^* \text{ بحيث } (u,\mathrm{v},\mathrm{w})\in T$$

الجزء الثالث

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$، لتكن $\mathscr{C}$ الدائرة التي مركزها O و شعاعها 1 و A و B النقطتين اللتين إحداثيتيهما على التوالي هي $(1,0)$ و $(-1,0)$. ليكن (D) المستقيم الذي معادلته : $x=-1$

1) ليكن $t\in\mathbb{R}$ و M_t النقطة من المستوى بحيث : $\overrightarrow{BM_t}=t.\vec{j}$

2) إعط معادلة ديكارتية للمستقيم (AM_t) بدلالة t .

3) المستقيم (AM_t) يقطع الدائرة $\mathscr{C}$ في النقطتين A و N_t

إعط إحداثيتي النقطة N_t في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بدلالة t.

4) لتكن $P(u,v)$ نقطة من الدائرة $\mathscr{C}$ بحيث $P\neq A$

أ) المستقيمان (AP) و (D) يتقاطعان في النقطة Q . إعط إحداثيتي Q

ب) بين أن $P=N_{\frac{2v}{1-u}}$

5) استنتج أنه مهما يكن $s>0$ و $r>0$ عددين جذريين بحيث : $s^2+r^2=1$ فإنه يوجد عدد جذري وحيد t أكبر قطعا من 2

بحيث $\begin{cases} r = \dfrac{t^2-4}{t^2+4} \\ s = \dfrac{4t}{t^2+4} \end{cases}$

6) ليكن (x,y,z) عنصرا من S بحيث $x<y$.

أ) بين أنه يوجد عدد جذري وحيد t بحيث : $2<t<2\sqrt{2}+2$ و $\begin{cases} \dfrac{x}{z} = \dfrac{t^2-4}{t^2+4} \\ \dfrac{y}{z} = \dfrac{4t}{t^2+4} \end{cases}$

ب) استنتج أنه يوجد عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمين و أوليان فيما بينهما p و q بحيث :

$$2q<p<\left(2\sqrt{2}+2\right)q$$

و $\dfrac{y}{z} = \dfrac{4pq}{p^2+4q^2}$, $\dfrac{x}{z} = \dfrac{p^2-4q^2}{p^2+4q^2}$

ج) هل $\left(p^2-4q^2, 4p, p^2+4q^2\right)$ ينتمي إلى T ؟ علل جوابك .

7) إعط عنصرين مختلفين من T و اعط لكل منهما زوجا مولدا .