

~ Tronc Commun ~
L'ordre dans R
(6 exercices résolus)

Exercice 1 :

soit n un entier naturel non nul, comparer a et b dans les cas suivants :

- 1) $a = \frac{1}{n}$; $b = \frac{2}{n+1}$
- 2) $a = \frac{n}{n+1}$; $b = \frac{n+1}{n+2}$
- 3) $a = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$; $b = \sqrt{n+1}$

Exercice 2 :

Soient a et b deux réels strictement positifs.

- 1) Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$
- 2) Développer $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$
- 3) En déduire que $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

Exercice 3 :

Soient a et b deux réels tels que $a \geq 1$ et $b \geq 1$.

Montrer que $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \leq \sqrt{ab}$

Exercice 4 :

Soient x et y deux réels positifs tels que $x + y = 1$

- 1) Montrer que $xy \leq \frac{1}{4}$
- 2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)\left(1 + \frac{1}{y^n}\right) \geq (1 + 2^n)^2$

Exercice 5 :

x et y deux réels tels que : $0 < x < y$

- 1) Montrer que $x^2 < xy < y^2$
- 2) Montrer que si $xy = 15$ alors $x < \sqrt{15} < y$

3) Montrer que $\frac{931}{241} < \sqrt{15} < \frac{3615}{931}$

Exercice 6 :

Soient x et y deux réels tels que : $1 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

On pose $E = x^2 - y^2 + x + y$

- 1) Donner un encadrement de E
- 2) Vérifier que : $E = (x + y)(x - y + 1)$ et en déduire un encadrement de E .
- 3) En déduire que : $\frac{3}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}$

math.ma

Corrigé de l'exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$1) a-b = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{n+1-2n}{n(n+1)} = \frac{1-n}{n(n+1)}$$

On a $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n > 0$ et $n \geq 1$ Donc $n(n+1) > 0$ et $1-n \leq 0$

$$\text{Donc } \frac{1-n}{n(n+1)} \leq 0$$

Donc $a-b \leq 0$ Et par suite $a \leq b$

$$2) a-b = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n(n+2)-(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n-n^2-2n-1}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$$

On a $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n > 0$ Donc $(n+1)(n+2) > 0$

$$\text{Donc } \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

Donc $a-b < 0$ Et par suite $a < b$

$$3) a-b = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1} = \frac{n-n-1}{\sqrt{n+1}} = \frac{-1}{\sqrt{n+1}}$$

On a $\sqrt{n+1} > 0$

$$\text{Donc } \frac{-1}{\sqrt{n+1}} < 0$$

Corrigé de l'exercice 2

1) Soient a et b deux réels strictement positifs

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 &= \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} \\ &= \frac{(a-b)^2}{ab} \end{aligned}$$

On a $(a-b)^2 \geq 0$ et $ab > 0$

$$\text{Donc } \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$$

$$\text{Donc } \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 \geq 0$$

Et par suite $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ pour tous a et b deux réels strictement positifs.

$$2) (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$$

3) Soient a et b deux réels strictement positifs

D'après le résultat de la question 1), on a : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

$$\text{Donc } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \geq 4$$

Et par suite $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ pour tous a et b deux réels strictement positifs.

Corrigé de l'exercice 3

Soient a et b deux réels tels que $a \geq 1$ et $b \geq 1$.

$$\begin{aligned} (\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1})^2 - (\sqrt{ab})^2 &= a-1 + 2\sqrt{(a-1)(b-1)} + b-1 - ab \\ &= a-ab + b-1 + 2\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1 \\ &= a(1-b) - (1-b) + 2\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1 \\ &= -(a-1)(b-1) + 2\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1 \\ &= -\left[(a-1)(b-1) - 2\sqrt{(a-1)(b-1)} + 1\right] \\ &= -\left[\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1\right]^2 \end{aligned}$$

Puisque $-\left[\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1\right]^2 \leq 0$ alors $(\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1})^2 - (\sqrt{ab})^2 \leq 0$

$$\text{Donc } (\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1})^2 \leq (\sqrt{ab})^2$$

Et par suite $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \leq \sqrt{ab}$ pour tous a et b deux réels strictement positifs.

(Rq : $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \geq 0$ et $\sqrt{ab} \geq 0$)

Corrigé de l'exercice 4

1) Soient x et y deux réels positifs tels que $x + y = 1$

$$\text{On a } 0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

$$\text{Donc } 0 \leq x + y - 2\sqrt{xy}$$

$$\text{Donc } 2\sqrt{xy} \leq x + y$$

$$\text{Et puisque } x + y = 1 \text{ alors } 2\sqrt{xy} \leq 1$$

$$\text{Donc } 4xy \leq 1$$

$$\text{D'où } xy \leq \frac{1}{4}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{On a : } \left(1 + \frac{1}{x^n}\right) \left(1 + \frac{1}{y^n}\right) = 1 + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} + \frac{1}{(xy)^n} = 1 + \frac{x^n + y^n}{(xy)^n} + \frac{1}{(xy)^n}$$

$$\checkmark \text{ D'après le résultat de la question 1) on a : } xy \leq \frac{1}{4} \text{ donc } \boxed{\frac{1}{(xy)^n} \geq 2^{2n}} \quad (*)$$

$$\checkmark \text{ On sait que } (\sqrt{x^n} - \sqrt{y^n})^2 \geq 0 \text{ donc } x^n + y^n \geq 2\sqrt{(xy)^n}$$

$$\text{Donc } \frac{x^n + y^n}{(xy)^n} \geq \frac{2}{\sqrt{(xy)^n}}$$

$$\text{Et en utilisant } (*) : \text{ Il est clair que : } \frac{2}{\sqrt{(xy)^n}} \geq 2 \times 2^n$$

$$\text{D'où } \boxed{\frac{x^n + y^n}{(xy)^n} \geq 2 \times 2^n} \quad (**)$$

$$\checkmark \text{ D'après } (*) \text{ et } (**): 1 + \frac{x^n + y^n}{(xy)^n} + \frac{1}{(xy)^n} \geq 1 + 2 \times 2^n + 2^{2n}$$

$$\text{D'où } \boxed{\boxed{\left(1 + \frac{1}{x^n}\right) \left(1 + \frac{1}{y^n}\right) \geq (1 + 2^n)^2}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} .$$

Corrigé de l'exercice 5

1) Soient x et y deux réels tels que : $0 < x < y$

On a $x < y$ et $x > 0$

donc $x \times x < x \times y$

donc $x^2 < xy$

et on a $x < y$ et $y > 0$

donc $x \times y < y \times y$

donc $xy < y^2$

et par suite $x^2 < xy < y^2$

2) Supposons que $xy = 15$

D'après le résultat de la question 1), on a $x^2 < xy < y^2$

Donc $x^2 < 15 < y^2$

Donc $\sqrt{x^2} < \sqrt{15} < \sqrt{y^2}$

Donc $|x| < \sqrt{15} < |y|$

Et puisque $x > 0$ et $y > 0$ alors $x < \sqrt{15} < y$

3) Posons $x = \frac{931}{241}$ et $y = \frac{3615}{931}$

On a $0 < x < y$ et $xy = \frac{931}{241} \times \frac{3615}{931} = 15$

Donc D'après le résultat de la question 2), on a : $\frac{931}{241} < \sqrt{15} < \frac{3615}{931}$.

Corrigé de l'exercice 6

Soient x et y deux réels tels que : $1 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

1) On a $1 \leq x \leq 2$

donc $1 \leq x^2 \leq 4$

Et on a $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

$$\text{donc } \frac{1}{4} \leq y^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{-9}{4} \leq -y^2 \leq \frac{-1}{4}}$$

$$\text{donc } 1 - \frac{9}{4} + 1 + \frac{1}{2} \leq x^2 - y^2 + x + y \leq 4 - \frac{1}{4} + 2 + \frac{3}{2}$$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{1}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}}$$

2)

$$\checkmark (x+y)(x-y+1) = x^2 - xy + x + xy - y^2 + y = x^2 - y^2 + x + y = E$$

$$\checkmark \text{ On a } 1 \leq x \leq 2 \text{ et } \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Donc } \boxed{\frac{3}{2} \leq x+y \leq \frac{7}{2}} \text{ et } \boxed{\frac{1}{2} \leq x-y+1 \leq \frac{5}{2}}$$

$$\text{Donc } \frac{3}{4} \leq (x+y)(x-y+1) \leq \frac{35}{4}$$

$$\text{Et par suite } \boxed{\frac{3}{4} \leq E \leq \frac{35}{4}}$$

3) On a :

d'après le résultat de la question 1) : $E \in \left[\frac{1}{4}, \frac{29}{4} \right]$ et d'après le résultat de la question

$$2) : E \in \left[\frac{3}{4}, \frac{35}{4} \right]$$

$$\text{donc } E \in \left[\frac{1}{4}, \frac{29}{4} \right] \cap \left[\frac{3}{4}, \frac{35}{4} \right]$$

$$\text{d'où } E \in \left[\frac{3}{4}, \frac{29}{4} \right].$$

つづく