~ 1[ère] année Sciences Mathématiques ~

Les ensembles et les applications

(Série #2 : 10 exercices résolus)

Exercice 1 :

Soient $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ et $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ les applications définies par :

$$\forall k\in\mathbb{N}, f(k)=2k \quad \text{et} \quad g(k)=\begin{cases} k/2 & si \quad k \quad est \quad pair \\ (k-1)/2 & si \quad k \quad est \quad impair \end{cases}$$

a) Etudier l'injectivité , la surjectivité et la bijectivité de f et de g
b) Préciser les applications $g\circ f$ et $f\circ g$
Etudier leur injectivité , surjectivité et bijectivité

Exercice 2 :

on considère l'application $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définie par : $f(x,y)=x+y$

1) Montrer que l'application f est surjective
2) Montrer que f n'est pas injective

Exercice 3 :

On considère l'application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=x^3+x-2$

1) Montrer que f est injective
2) En déduire les solutions de l'équation $f(x)=0$

Exercice 4 :

On considère deux ensembles non vides E et F , et soit $f:E\to F$ une application .

1) Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$
   a) Montrer que si $A\subset B$ alors $f(A)\subset f(B)$
   b) En déduire que $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$
   c) Montrer que $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$
2) Montrer que si f est injective alors pour tous A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$:
   On a $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$
3) Montrer que : f est bijective si et seulement si pour tout partie A de E :
   On a $f(C_E^A)=C_F^{f(A)}$

Exercice 5 :

On considère deux ensembles non vides E et F, et soit $f : E \to F$ une application .
Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(F)$

1) Montrer que si $A \subset B$ alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
2) Montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
3) Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
4) Montrer que $f^{-1}\left(C_F^A\right) = C_E^{f^{-1}(A)}$

Exercice 6 :

On considère deux ensembles non vides E et F, et soit $f : E \to F$ une application.

1) Soit A un élément de $\mathcal{P}(F)$
   Montrer que $f\left(f^{-1}(A)\right) \subset A$
2) Montrer que : f est surjective si et seulement si pour tout A de $\mathcal{P}(F)$:
   $f\left(f^{-1}(A)\right) = A$

Exercice 7 :

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Etablir les implications suivantes :

a) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective
b) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective
c) $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective
d) $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective

Exercice 8 :

Soient E, F et G trois ensembles , $f : E \to F$ et $g_1, g_2 : F \to G$
On suppose que f est surjective et $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Montrer que $g_1 = g_2$

Exercice 9 :

On considère l'application $\begin{array}{rccc} f : & \left[\frac{-1}{2}, +\infty\right[& \to & \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[\\ & x & \mapsto & x^2 + x + 2 \end{array}$.

Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque

Exercice 10 :

On considère l'application
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x(1-x)^2}{(1+x^2)^2} \end{array}$$

1) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\quad f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$
2) Montrer que f n'est pas injective
3) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\quad f(x) \leq \dfrac{1}{4}$
4) Montrer que f n'est pas surjective

Corrigé de l'exercice 1

a) On a

k	0	1	2	3	..	..	..
$f(k)$	0	2	4	6	..	..	..

k	0	1	2	3	..	..	..
$g(k)$	0	0	1	1	..	..	..

f est injective car :

$$f(k)=f(k') \Rightarrow 2k=2k'$$
$$\Rightarrow k=k'$$

Mais non surjective car les nombres impairs ne sont pas des valeurs prises .

g est surjective car $2y$ est un antécédent de y mais non injective car un nombre pair et l'impair qui le suit

Prennent même valeur par g .

b) D'une part $g\circ f(k)=k$ donc $g\circ f=Id_{\mathbb{N}}$

D'autre part

$$(f\circ g)(k)=\begin{cases} k & si \quad k \quad est \quad pair \\ k-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$g\circ f$ est bijective . $f\circ g$ n'est ni injective , ni surjective.

Corrigé de l'exercice 2

1) Soit $n\in\mathbb{N}$

- Si $n=0$ alors $f(0,0)=0=n$
- Si $n\geq 1$ alors $n=(n-1)+1$ et $(n-1)\in\mathbb{N}$

  D'où $f(n-1,1)=n$

  Donc l'équation $f(x,y)=n$ admet au moins une solution dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

  Et par suite f est surjective .

2) On a $f(2,3)=5$ et $f(3,2)=5$ donc $f(2,3)=f(3,2)$ mais $(2,3)\neq(3,2)$

Donc f n'est pas injective .

Corrigé de l'exercice 3

1) Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que : $f(x)=f(y)$

On a $x^3+x-2=y^3+y-2$ c.-à-d. $x^3-y^3+x-y=0$

Donc $(x-y)\left(x^2+xy+y^2+1\right)=0$

On a $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2-\frac{1}{4}y^2+y^2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2$

Donc $x^2+xy+y^2+1>0$

D'où $x-y=0$ c.-à-d. $x=y$

Et par suite f est injective.

2)

- ✓ On a $f(1)=0$ donc 1 est solution de l'équation $f(x)=0$
- ✓ Si α est une autre solution de l'équation $f(x)=0$

  Alors $f(\alpha)=0$

  Donc $f(\alpha)=f(1)$

  Et puisque f est injective alors $\alpha=1$

D'où 1 est l'unique solution de l'équation $f(x)=0$

Corrigé de l'exercice 4

1)

a) Soit $y\in f(A)$

Il existe $x\in A$ tel que $y=f(x)$

Puisque $A\subset B$ alors $x\in B$ d'où $f(x)\in f(B)$

Donc $y\in f(B)$

Et par suite pour tout y de $f(A)$ on a $y\in f(B)$

c.-à-d. $f(A)\subset f(B)$

b) On a $A \cap B \subset A$ donc d'près le résultat de la question précédente :
$f(A \cap B) \subset f(A)$
De manière symétrique on a : $f(A \cap B) \subset f(B)$
Donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

c)
- ✓ On a $A \subset A \cup B$ donc le résultat de la question 1)a) on a :
  $f(A) \subset f(A \cup B)$
  De manière symétrique on a : $f(B) \subset f(A \cup B)$
  Donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$
- ✓ Soit $y \in f(A \cup B)$
  Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$
  - Si $x \in A$ alors $y \in f(A)$
  - Si $x \in B$ alors $y \in f(B)$

    D'où $y \in f(A) \cup f(B)$
- ✓ Et par suite $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2) Supposons que f est injective et montrons que pour tous A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$:
On a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
Soient A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$
- ✓ D'après le résultat de la question 1) b) on a : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- ✓ Soit $y \in f(A) \cap f(B)$
  On a $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$
  Donc il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$ et il existe $z \in B$ tel que $y = f(z)$
  Et puisque f est injective et $f(x) = f(z)$ alors $x = z$
  Donc il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$
  c.-à-d. $y \in f(A \cap B)$
  d'où $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$
- ✓ Et par suite : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

3)

✓ Supposons que f est bijective et montrons que pour tout partie A de E :

On a $f\left(C_E^A\right)=C_F^{f(A)}$

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On pose $B = C_E^A$

On a $E = A \cup B$ et d'après le résultat de la question 1)c) :

$f(E)=f(A \cup B)=f(A)\cup f(B)$ c.-à-d. $F=f(A)\cup f(B)$

(sachant que $f(E)=F$ car f est surjective)

On a $A \cap B = \varnothing$ et puisque f est bijective (f est injective) alors d'après le résultat

de la question 2), on a : $f(A)\cap f(B)=\varnothing$

donc $f(B)=C_F^{f(A)}$ c.-à-d. $f\left(C_E^A\right)=C_F^{f(A)}$.

✓ Supposons que pour tout partie A de E : $f\left(C_E^A\right)=C_F^{f(A)}$ et montrons que f est bijective.

- On a $E = A \cup C_E^A$ et d'après le résultat de la question 1)c) :

  $f(E)=f(A)\cup f\left(C_E^A\right)$

  Donc $f(E)=f(A)\cup C_F^{f(A)}$ c.-à-d. $f(E)=F$

  Donc f est surjective
- Soient x et y deux éléments de E tels que $x \neq y$

  On pose $A=\{x\}$

  On a $y \notin A$ (car $x \neq y$) c.-à-d. $y \in C_E^A$ c.-à-d. $f(y)\in f\left(C_E^A\right)$

  Donc $f(y)\in C_F^{f(A)}$ c.-à-d. $f(y)\notin f(A)$

  d'où $f(x)\neq f(y)$ (car $f(x)\in f(A)$)

  donc f est injective

et par suite f est bijective.

Corrigé de l'exercice 5

1) Soit $x \in f^{-1}(A)$

   On a $f(x) \in A$ et puisque $A \subset B$ alors $f(x) \in B$

   Donc $x \in f^{-1}(B)$

   Et par suite $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$

2) On a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \cap B) &= \{x \in E / f(x) \in A \cap B\} \\ &= \{x \in E / f(x) \in A \quad et \quad f(x) \in B\} \\ &= \{x \in E / f(x) \in A\} \cap \{x \in E / f(x) \in B\} \\ &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

   Donc $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

3) On a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \cup B) &= \{x \in E / f(x) \in A \cup B\} \\ &= \{x \in E / f(x) \in A \quad ou \quad f(x) \in B\} \\ &= \{x \in E / f(x) \in A\} \cup \{x \in E / f(x) \in B\} \\ &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{aligned}$$

   Donc $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

4) On a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(C_F^A) &= \{x \in E / f(x) \in C_F^A\} \\ &= \{x \in E / f(x) \notin A\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_E^{f^{-1}(A)} &= \{x \in E / x \notin f^{-1}(A)\} \\ &= \{x \in E / f(x) \notin A\} \end{aligned}$$

   Donc $f^{-1}(C_F^A) = C_E^{f^{-1}(A)}$

Corrigé de l'exercice 6

1) Soit $x \in f\left(f^{-1}(A)\right)$

Il existe $y \in f^{-1}(A)$ tel que $x = f(y)$

On a $y \in f^{-1}(A)$ donc $f(y) \in A$ d'où $x \in A$.

Donc pour tout x de $f\left(f^{-1}(A)\right)$ on a $x \in A$

c.-à-d. $f\left(f^{-1}(A)\right) \subset A$

2)

- ✓ Supposons que f est surjective et montrons que pour tout A de $\mathcal{P}(F)$: $f\left(f^{-1}(A)\right) = A$

  Soit $A \in \mathcal{P}(F)$

  - D'après le résultat de la question 1) : $f\left(f^{-1}(A)\right) \subset A$
  - Soit $x \in A$

    On a $x \in F$ et puisque f est surjective alors il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ d'où $y \in f^{-1}(A)$

    Donc $x \in f\left(f^{-1}(A)\right)$

    Donc $A \subset f\left(f^{-1}(A)\right)$

  Et par suite $f\left(f^{-1}(A)\right) = A$

- ✓ Supposons que pour tout A de $\mathcal{P}(F)$: $f\left(f^{-1}(A)\right) = A$ et montrons que f est surjective.

  On a $F \in \mathcal{P}(F)$ donc $f\left(f^{-1}(F)\right) = F$

  Et puisque $f^{-1}(F) = E$ alors $f(E) = F$ c.-à-d. f est surjective .

Corrigé de l'exercice 7

a) Supposons que $g\circ f$ est injective

Soient $(x,x')\in E^2$

Si $f(x)=f(x')$ alors $g(f(x))=g(f(x'))$

Or $g\circ f$ est injective , donc $x=x'$

Ainsi f est injective

b) Supposons que $g\circ f$ est surjective

Soit $z\in G$ .il existe $x\in E$ tel que $z=g(f(x))$. Pour $y=f(x)\in F$, on a $g(y)=z$

Ainsi g est surjective

c) Supposons que $g\circ f$ est injective et f est surjective

D'après le résultat de la question a) : f est injective et puisque f est surjective alors f est bijective.

$g=(g\circ f)\circ f^{-1}$ est injective par composition d'applications injectives

d) Supposons $g\circ f$ est surjective et g est injective

D'après le résultat de la question b) : g est surjective et puisque g est injective alors g est bijective.

$f=g^{-1}\circ(g\circ f)$ est surjective par composition d'applications surjectives.

Corrigé de l'exercice 8

Soit $y\in F$

Il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$ et alors $g_1(y)=(g_1\circ f)(x)=(g_2\circ f)(x)=g_2(y)$

Donc $g_1=g_2$

Corrigé de l'exercice 9

Montrons que f est une bijection

c.-à-d. pour tout y de $\left[\frac{3}{4},+\infty\right[$: l'équation $f(x)=y$ admet une solution unique dans $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$

$$
\begin{aligned}
f(x)=y \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+x+1=y\\
&\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=y\\
&\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=y-\frac{3}{4}\\
&\Leftrightarrow \quad \left|x+\frac{1}{2}\right|=\sqrt{y-\frac{3}{4}}\\
&\Leftrightarrow \quad x+\frac{1}{2}=\sqrt{y-\frac{3}{4}} \quad ou \quad x+\frac{1}{2}=-\sqrt{y-\frac{3}{4}}\\
&\Leftrightarrow \quad x=-\frac{1}{2}+\sqrt{y-\frac{3}{4}} \quad ou \quad x=-\frac{1}{2}-\sqrt{y-\frac{3}{4}}
\end{aligned}
$$

- ✓ On a $f\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{3}{4}$
- ✓ Si $y>\frac{3}{4}$ alors $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{y-\frac{3}{4}}>-\frac{1}{2}$ et $x=-\frac{1}{2}-\sqrt{y-\frac{3}{4}}<-\frac{1}{2}$

Donc pour tout $y\in\left[\frac{3}{4},+\infty\right[$ il existe unique

$x=-\frac{1}{2}+\sqrt{y-\frac{3}{4}}\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ tel que : $f(x)=y$

Et par suite f est une bijection et sa bijection réciproque f^{-1} est défini par :

$$
\begin{aligned}
f^{-1}:\ \left[\frac{3}{4},+\infty\right[&\rightarrow \left[\frac{-1}{2},+\infty\right[\\
x &\mapsto -\frac{1}{2}+\sqrt{x-\frac{3}{4}}
\end{aligned}
$$

Corrigé de l'exercice 10

1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$

On a : $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}{\left(1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2\right)^2}=\dfrac{\dfrac{1}{x^3}(x-1)^2}{\dfrac{1}{x^4}\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x(x-1)^2}{\left(1+x^2\right)^2}$

Donc : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^*\right) \quad f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$

2) On $4 \in \mathbb{R}^*$ et $\dfrac{1}{4} \in \mathbb{R}^*$

$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=f(4)$ et $\dfrac{1}{4} \neq 4$

Donc f n'est pas injective

3)

- ✓ On a : $f(0)=0 \leq \dfrac{1}{4}$
- ✓ Soit $x \in \mathbb{R}^*$

On a :

$$\begin{aligned}
f(x) \leq \frac{1}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad 4x\left(x^2-2x+1\right) \leq x^4+2x^2+1 \\
&\Leftrightarrow \quad x^4-4x^3+10x^2-4x+1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2\left[x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+10\right] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+8\right] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2\left[\left(x+\frac{1}{x}-2\right)^2+4\right] \geq 0
\end{aligned}$$

La dernière proposition est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f(x) \leq \dfrac{1}{4}$

Et par suite : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) \quad f\left(x\right) \leq \dfrac{1}{4}$

4) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f\left(x\right) \leq \dfrac{1}{4}$ donc $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) \quad f\left(x\right) \neq 3$

   Donc le nombre 3 n'a pas d'antécédents par f
   Et par suite f n'est pas surjective .

つづく