

~ 2^{ème} Sciences Expérimentales ~
Série d'exercices : Limites et continuités
(12 exercices résolus)

Exercice 1 :

Montrer que la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x} \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$ est continue en 0

Exercice 2 :

Montrer que la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3} & x \neq 3 \\ f(3) = 7 \end{cases}$ est continue en 3

Exercice 3 :

Montrer que la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{7-6x} & x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2} & x > 2 \end{cases}$ est continue en 2

Exercice 4 :

Soit f la fonction la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1} & x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases} \quad (m \text{ est un paramètre réel})$$

Déterminer la valeur du nombre réel m pour laquelle f est continue en 1

Exercices 5 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan(x)}{3x}\right) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right) ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}}$$

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 + x - 1$

- 1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur \mathbb{R}
- 2) Montrer que $\alpha \in]0, 1[$
- 3) Etudier le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R}

Exercice 7 :

Montrer que l'équation (E) : $1 + \sin x = x$ admet au moins une solution sur l'intervalle

$$I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$$

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

- 1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'il faut déterminer.
- 2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x$

- 1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'il faut déterminer.
- 2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

Exercice 10 :

Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}} ; \quad B = \frac{1}{\sqrt[3]{3} + 1} ; \quad C = \frac{\sqrt[3]{4} \sqrt{8} (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt[3]{4}} ; \quad D = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}}$$

Exercice 11 :

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - x$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$

3)
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1}$$

4)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+3} - 2x + 4$$

5)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$$

6)
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$$

Exercice 12 :Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 12 = 0$ math.ma

Corrigé de l'exercice 1

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\tan x (\sqrt{x+1}-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cancel{1} - \cancel{1}}{\tan x (\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan x} \times \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

Par suite la fonction f est continue en 0

Corrigé de l'exercice 2

On a $f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = x + 4$ pour tout $x \neq 3$

Donc $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 4 = 7$

D'où $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

Par suite la fonction f est continue en 3

Corrigé de l'exercice 3

On a $f(2) = \frac{2(2)+1}{7-3(2)} = 5$

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{2x+1}{7-3x} = 5$

Et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x + 3 = 5$

Puisque $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = f(2)$ alors f est continue en 2

Corrigé de l'exercice 4

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(1+h))}{h} \quad \left(\begin{array}{l} h = x - 1 \\ x \rightarrow 1 \\ h \rightarrow 0 \end{array} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + \pi h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} -\pi \frac{\sin(\pi h)}{\pi h} \quad \left(\begin{array}{l} t = \pi h \\ h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right) \\
&= -\pi
\end{aligned}$$

f est continue en 1 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\Leftrightarrow \boxed{m = -\pi}$$

Corrigé de l'exercice 5

- On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \tan(x)}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{3} \times \frac{\tan x}{x} = \frac{\pi}{3}$ et la fonction "cos" est continue en $\frac{\pi}{3}$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan(x)}{3x}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2}{4x^2} = \frac{\pi}{4}$ et la fonction "sin" est continue en $\frac{\pi}{4}$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{1 - \cos x}{x^2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$ et la fonction " $\sqrt{\quad}$ " est continue en 4

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2x^2}{1 - \cos x}} = \sqrt{4} = 2$$

Corrigé de l'exercice 6

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

- 1) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur \mathbb{R}

On a :

- ▶ f est continue sur \mathbb{R} (car f est un polynôme)
- ▶ $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur \mathbb{R}
- ▶ $0 \in f(\mathbb{R})$ (car $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$)

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur \mathbb{R}

- 2) On a f est continue sur $[0, 1]$ et $\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \times f(1) < 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $0 < \alpha < 1$

- 3) Etudions le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R}

1^{er} cas : si $x \leq \alpha$

Alors $f(x) \leq f(\alpha)$ (car f est croissante sur \mathbb{R})

Donc $f(x) \leq 0$ (car $f(\alpha) = 0$)

2^{ème} cas : si $x \geq \alpha$

Alors $f(x) \geq f(\alpha)$ (car f est croissante sur \mathbb{R})

Donc $f(x) \geq 0$ (car $f(\alpha) = 0$)

Corrigé de l'exercice 7

1) Montrons que l'équation (E) : $1 + \sin x = x$ admet au moins une solution sur

$$\text{l'intervalle } I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$$

Considérons la fonction h définie par : $h(x) = 1 + \sin(x) - x$

On a :

▶ h est continue sur $I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$

$$\left. \begin{array}{l} h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4-\pi}{2} > 0 \\ h\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6+3\sqrt{3}-4\pi}{6} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h\left(\frac{\pi}{2}\right) \times h\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$$

2) Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires : l'équation $h(x) = 0$ admet au

moins une solution sur l'intervalle $I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$

D'où l'équation (E) : $1 + \sin x = x$ admet au moins une solution sur l'intervalle

$$I = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$$

Corrigé de l'exercice 8

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

1) On a :

▶ f est continue sur $I = \mathbb{R}^+$ (car f est une fonction homographique)

▶ f est dérivable sur $I = \mathbb{R}^+$ et on a $(\forall x \in \mathbb{R}^+) f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$

Donc f est strictement croissante sur $I = \mathbb{R}^+$

Par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(I)$ vers I

Tel que : $J = f(\mathbb{R}^+) = f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [-1, 1[$

2) On a :

$$\begin{pmatrix} y = f^{-1}(x) \\ x \in J = [-1, 1[\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = f(y) \\ y \in I = \mathbb{R}^+ \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-1}{y+1}$$

$$\Leftrightarrow xy + x = y - 1$$

$$\Leftrightarrow y - xy = x + 1$$

$$\Leftrightarrow y(1-x) = x + 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x+1}{1-x}$$

Donc : $(\forall x \in [-1, 1[) f^{-1}(x) = \frac{x+1}{1-x}$

Corrigé de l'exercice 9

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x$

1) Montrons que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}

On a :

▶ f est continue sur $I =]1, +\infty[$

▶ f est strictement croissante sur $I =]1, +\infty[$ (car

$$(\forall x \in]1, +\infty[) f'(x) = 2(x-1) > 0)$$

Par suite f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(I)$ vers I .

Tel que : $J = f(]1, +\infty[) =]-1, +\infty[$

2) On a :

$$\begin{pmatrix} y = f^{-1}(x) \\ x \in]-1, +\infty[\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = f(y) \\ y \in]1, +\infty[\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = y^2 - 2y$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y - x = 0$$

$$\Delta = 4 + 4x = 4(1+x) > 0 \quad \text{car } x > -1$$

$$\text{Donc } y = \frac{2 - \sqrt{4(1+x)}}{2} = 1 - \sqrt{1+x} < 1 \quad \text{ou} \quad y = \frac{2 + \sqrt{4(1+x)}}{2} = 1 + \sqrt{1+x} > 1$$

$$\text{Donc } y = 1 + \sqrt{1+x}$$

$$\text{D'où } (\forall x \in]-1, +\infty[) \quad f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+x}$$

Corrigé de l'exercice 10

- $A = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}} = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{2^3}}{\sqrt[5]{2^7}} = \frac{10\sqrt{2^2} \times 10\sqrt{2^{15}}}{10\sqrt{2^7}} = \frac{10\sqrt{2^{17}}}{10\sqrt{2^7}} = 10\sqrt{2^{10}} = 2$
- $B = \frac{1}{\sqrt[3]{3} + 1} = \frac{(\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3} + 1}{(\sqrt[3]{3} + 1)((\sqrt[3]{3})^2 - \sqrt[3]{3} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}{(\sqrt[3]{3})^3 + 1} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1}{4}$
- $C = \frac{\sqrt[3]{4} \sqrt{8} (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}} = \frac{4^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\left(2^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2}{\left(4^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{2}}}{4^{\frac{1}{6}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{6}}} = 2^{\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{3}} = 2^{2 + \frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{2}$
- $D = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}} = \frac{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2}{(\sqrt[3]{4})^3 - (\sqrt[3]{3})^3} = \frac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}}{4 - 3} = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}$

Correction de l'exercice 11

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 2} + x)}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 2 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} + x} = 0$$

(car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2} + x = +\infty$)

$$2) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 2^3}{(x - 8)((\sqrt[3]{x})^2 + 2\sqrt[3]{x} + 2^2)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{(x - 8)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \frac{1}{12}$$

3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - 2}{x-1} - \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+6-8}{(x-1)(\sqrt[3]{2x+6}^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 4)} - \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\sqrt[3]{2x+6}^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 4} - \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \\ &= \frac{2}{12} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{-1}{12} \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+3} - 2x + 4 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left[1 + \frac{3}{x^2} \right]} - 2x + 4 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 2x + 4 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 2 + \frac{4}{x^2} \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - 2 + \frac{4}{x^2} \right) = -1 \end{cases}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2}} = 0 \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$6) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt[4]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$$

$$\text{Car : } \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x + 1 = 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x - 1 = 0^+ \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 12

$$\text{On a : } \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 12 = 0$$

$$\text{On pose } x = t^6, \text{ l'équation devient } \sqrt{t^6} + \sqrt[3]{t^6} - 12 = 0 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 12 = 0$$

$$(t - 2)(t^2 + 3t + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$t - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad t^2 + 3t + 6 = 0 \quad (\Delta = -15 < 0)$$

$$\Leftrightarrow t = 2$$

$$\text{Donc } x = 2^6 = 64. \text{ D'où } S = \{64\}$$

つづく

math.ma