~ *Examen Vintage* ~
Baccalauréat sciences expérimentales
Septembre 1974

Problème 1 :

Soit f_m la fonction de la variable réelle x, définie par : $f_m(x) = \ln(|x|) - x - m$
m désignant un paramètre réel

1. a) Quel est l'ensemble de définition de f_m ?
   b) Etudier les limites de f_m aux bornes des intervalles de son ensemble de définition.
   c) calculer $f'_m(x)$. En déduire les variations de f_m.

2. a) Construire dans un repère orthonormé, la courbe (C_0), représentative de la fonction f_0
   (f_0 correspond à la valeur $m = 0$)
   Etudier avec soin les branches infinies. Placer les points de (C_0) d'abscisses
   $-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 3$. Donner une détermination graphique de l'abscisse du point d'intersection de (C_0) et $x'Ox$.
   b) Comment obtient-on à partir de (C_0), la courbe représentative (C_m) de la fonction f_m ?
   N.B : (On prendra $0,7$ comme valeur approchée de $\ln 2$ et $1,1$ comme valeur approchée de $\ln 3$)

3. λ désigne un nombre réel tel que $0 < \lambda < 1$.
   a) Calculer l'aire $\mathcal{A}_\lambda$ du domaine limité par (C_0), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1, x = \lambda$
   b) Calculer $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} \mathcal{A}_\lambda$

4. Utiliser la courbe (C_0) pour discuter suivant les valeurs du paramètre réel k le nombre et le signe
   Des racines de l'équation : $x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = e^{2(x+k)}$
   (On établira que cette équation est équivalente à : $x \in \mathbb{R}, \quad \ln|x| - x = k$)

Problème 2 :

On considère l'équation du second degré en z

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - 2z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \qquad (1)$$

où θ est un paramètre réel tel que $\theta \in [-\pi, \pi]$.

1. Résoudre cette équation. Préciser selon les valeurs de θ les modules et les arguments des racines
   z' et z'' de l'équation. Ces racines peuvent-elle être réelles ?

2. On prend $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$

   a) Calculer z' et z''

   b) Calculer $(z')^3$ et $(z'')^3$. Que remarque –t-on ?

   c) Former une équation du second degré admettant pour racines $\dfrac{1}{z'}$ et $\dfrac{1}{z''}$.

Correction : Problème 1

1. $f_m(x)=\ln(|x|)-x-m$

   a) Ensemble de définition de f_m : $D_{f_m}=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

   b) Limites aux bornes de D_{f_m} :

   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(-x)-x-m=+\infty$
   - $\lim\limits_{x\to 0^-} f_m(x)=-\infty$
   - $\lim\limits_{x\to 0^+} f_m(x)=-\infty$
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)-x-m=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x}-1-\frac{m}{x}\right)=-\infty$

   c) $f_m'(x)=\frac{1-x}{x}$; tableau de variation de f_m :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_m'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f_m(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

2. a) $f_0(x)=\ln(|x|)-x$

   - Tableau de variation de f_0 :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f_0'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f_0(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

   - Branches infinies :
     - La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à (C_0)
     - Lorsque x tend vers $+\infty$;

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_0(x)}{x}=-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f_0(x)+x\right)=+\infty\end{array}\right\}$$

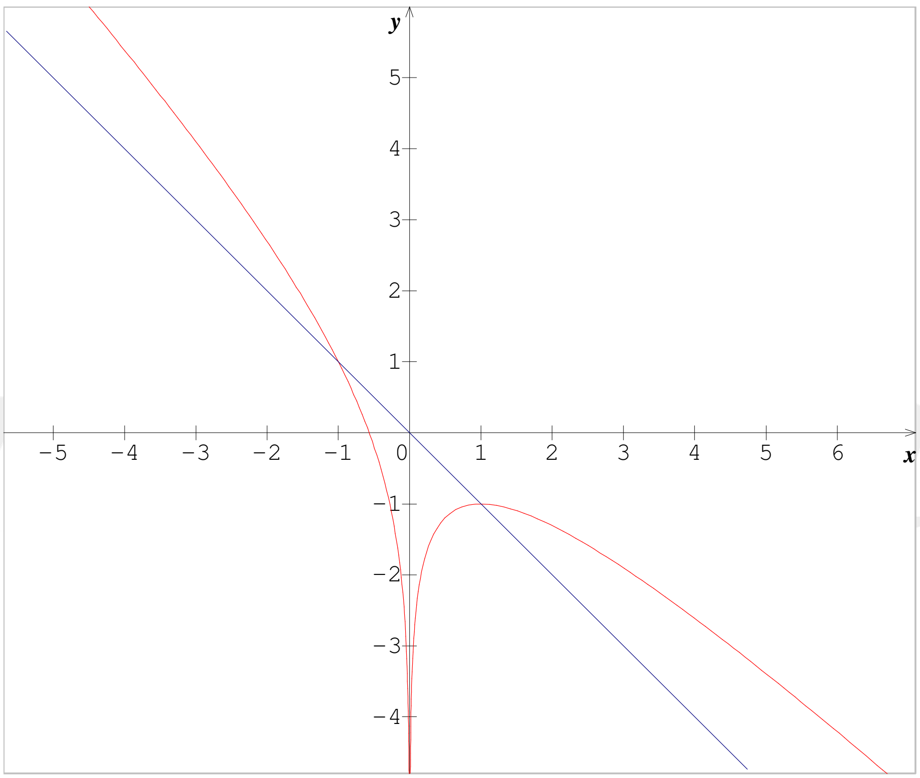
(C_0) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=-x$

- Lorsque x tend vers $-\infty$;

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f_0(x)}{x}=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f_0(x)+x\right)=+\infty\end{array}\right\}$$

(C_0) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=-x$

- Représentation graphique :



b) (C_m) est l'image de (C_0) par une translation de vecteur $-m.\vec{j}$

3. a)

$$\mathcal{A}_\lambda=\int_\lambda^1\left|f_0(x)\right|dx=\int_\lambda^1 -f_0(x)\,dx=\int_\lambda^1(x-\ln x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\ln x+x\right]_\lambda^1=\frac{3}{2}-\frac{\lambda^2}{2}+\lambda\ln\lambda-\lambda$$

b) $\lim\limits_{\lambda\to0^+}\mathcal{A}_\lambda=\lim\limits_{\lambda\to0^+}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\lambda^2}{2}+\lambda\ln\lambda-\lambda=\dfrac{3}{2}$

4.

$$\begin{aligned} x^2 = e^{2(x+k)} &\Leftrightarrow \ln\left(x^2\right) = 2(x+k) \\ &\Leftrightarrow 2\ln\left(|x|\right) = 2(x+k) \\ &\Leftrightarrow \ln\left(|x|\right) - x = k \end{aligned}$$

- ✓ Si $k > -1$ alors il y a une seule racine négative
- ✓ Si $k = -1$ alors il y a 2 racines de signes contraires
- ✓ Si $k < -1$ alors il y a 3 racines ; une négative et 2 positives.

Correction : Problème 2

$z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - 2z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \qquad \left(\theta \in [-\pi, \pi]\right)$

1.

✓ $\Delta' = \left(i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2$

$z' = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad ; \quad z'' = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

- Si $-\pi \le \theta < 0$ alors

$$z' = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right)$$

$$\text{et} \quad z'' = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(-\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i \sin\left(-\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right)$$

- Si $\theta = 0$ alors : $z' = z'' = 0$
- Si $0 < \theta \le \pi$ alors :

$$z' = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$\text{et} \quad z'' = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{-\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\theta}{2}\right)\right)$$

✓

$$z' \in \mathbb{R}, z'' \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right) \quad -\pi \le \theta \le \pi$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0$$

2. $\theta = \frac{2\pi}{3}$

a) $z' = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + i\frac{3}{4}$

et $z'' = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{3}{4}$

b) $\left(z'\right)^3 = \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^3 = \sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\pi + i \sin\pi\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{8}$

$$\left(z''\right)^3 = \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)\right)^3 = \sin^3\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{8}$$

- $\left(z'\right)^3 = \left(z''\right)^3$
- $\left(z'\right)^3 \in \mathbb{R}, \left(z''\right)^3 \in \mathbb{R}$

つづく